Eine BEM–Toolbox zur Berechnung der Schallabstrahlung schwingender Strukturen vor Hindernissen und über absorbierendem Boden

Haike Brick, Martin Ochmann
Technische Fachhochschule Berlin; Email: brick@tfh-berlin.de, ochmann@tfh-berlin.de

Einleitung

Die Boundary–Element–Method (BEM) findet als sehr leistungsfähige Methode weiter Verbreitung bei der Simulation von Schallabstrahlung bzw. Schallstreuung im unbegrenzten Raum. Sie ist ebenfalls problemlos für Lösungen im Halbraum erweiterbar, solange der Halbraum durch eine perfekt schallharte bzw. schallweiche Ebene beschrieben ist[8], [10]. Die Greensche Funktion kann in diesem Fall durch einen einfachen Spiegelquellenansatz hergeleitet werden. Im Falle einer allgemeinen Impedanz–Randbedingung der unendlichen Ebene, $Z_B = \Re(Z_B) + j\Im(Z_B)$, kann mit diesem Ansatz die Randbedingung auf der Ebene jedoch nicht erfüllt werden. In der vorliegenden Arbeit wird eine geeignete Greensche Funktion und deren numerische Auswertung im Rahmen einer BEM–Toolbox dargestellt. Diese Arbeit ist eingebettet in ein Forschungsprojekt, welches erstmals in [3] vorgestellt wurde.

Theorie

Eine weithin bekannte Näherungslösung für das Schallfeld einer Kugel über lokal wirksamem Impedanzboden stellt die Weyl/van der Pol–Lösung dar (siehe z.B [1]). Für eine Anwendung in der BEM-Methode ist sie jedoch ungeeignet, da durch die notwendige räumlichen Diskretisierung der schwingenden Struktur die geometrischen Bedingungen für die Gültigkeit dieser Lösung naturgemäß verletzt sind. Exakte Lösungen für die Schallausbreitung über Impedanzboden wurden von verschiedenen Autoren veröffentlicht, u.a. von Attenborough [2], Thomasson[9], Habault/Filippi [5]. Ein Vergleich der Lösungen von Thomasson und Habault/Filippi für verschiedene Testfälle zeigt, dass die Lösungen zu gleichen Ergebnissen führen. Ein theoretischer Nachweis zur Gleichheit der Lösungen wurde nicht erbracht.

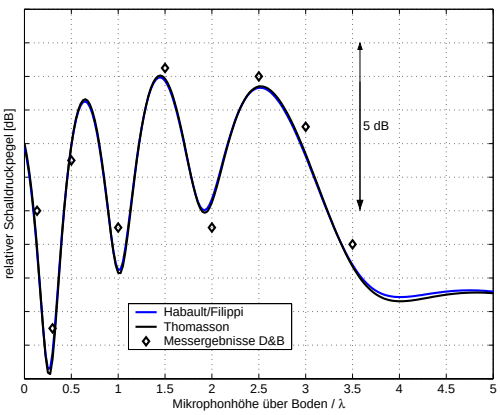

Abbildung 1: Vergleich der Lösungen verschiedener Autoren mit Messergebnissen aus [4]

Beispielhaft wird das Ergebnis des Vergleiches für eine Testkonfiguration gezeigt, die aus [4](dort Fall c) gewählt wurde. Eine Punktquelle in der Höhe von λ über Mineralfaserboden strahlt mit einer Frequenz von 1kHz, das Empfangsmikrophon ist horizontal 2λ vom Sender entfernt und seine Höhe variiert zwischen 0 und 5λ. Wie in Abb. 1 zu sehen ist, führen die beiden verglichenen Ansätze nicht nur zu dem gleichen Ergebnis, sie zeigen auch eine exzellente Übereinstimmung mit den Messergebnissen, die aus [4] entnommen sind. Von den beiden Lösungen ist die Lösung von Habault/Filippi am ehesten einer numerischen Auswertung im Sinne der BEM zugänglich. Die Lösung für die Greensche Funktion wie sie in [5](dort Gl.(36)) hergeleitet wird, splittet sich auf in eine Lösung für einen absorbierenden Boden mit Massecharakter, dh. $\Im(Z_B) > 0$, und eine Lösung für Boden mit Federcharakter, d.h. $\Im(Z_B) < 0$ (Zeitkonvention: $e^{i\omega t}$). Da sowohl der Integralterm wie auch die Hankelfunktion in der Lösung für den Federfall Singularitäten aufweisen, wurde in einem ersten Schritt die Lösung für den Massefall untersucht. Die Greensche Funktion $G(P,Q)$ für die Schallausbreitung zwischen einen Quellpunkt Q in [0 0 s] und einem Empfangspunkt P in [x y z] über lokal wirksamen Impedanzboden mit $\Im(Z_B) > 0$ wird nach [5] durch folgende Gleichung ausgedrückt

$$G(P,Q) = G_0 - 2\gamma \int_{-\infty}^{-s} e^{\gamma|s+z'|} \frac{e^{-ik_0 r}}{4\pi r} \mathrm{d}z' \qquad (1)$$

mit $\gamma = ik_0 Z_0/Z_B$ als normierte Admittanz der Ebene, $r^2 = (z-z')^2 + x^2 + y^2$ und G_0 als Summe der Greenschen Funktionen der Originalquelle und der Spiegelquelle,

$$G_0 = \frac{e^{-ik_0 R(P,Q)}}{4\pi R(P,Q)} + \frac{e^{-ik_0 R(P',Q)}}{4\pi R(P',Q)}. \qquad (2)$$

Dabei kennzeichnet der Apostroph die an der Ebene gespiegelten Abbildung des jeweiligen Punktes bzw. der Koordinate.

Numerische Auswertung

Nach einer Variablentransformation mit $\eta = (z'-s)\Re(\gamma)$, wie sie auch bei Li et. al[7] vorgeschlagen wird, läßt sich (1) zu folgendem Ausdruck umformen

$$G(P,Q) = G_0 - 2(1+i\tan\varphi) \int_0^\infty G(P',\bar{Q}) e^{-i\tan\varphi\,\eta} e^{-\eta} \mathrm{d}\eta \qquad (3)$$

wobei $\tan\varphi = \Im(\gamma)/\Re(\gamma)$ und $\bar{Q} = Q + e_s\eta/\Re(\gamma)$, $e_s = [0\,0\,1]$ und $G = e^{-j*k_0*R(P',\bar{Q})}/4\pi R(P',\bar{Q})$. Damit kann das Integral in (3) durch die Gauss–Laguerre–Quadratur gelöst werden[6], die folgendermaßen definiert ist

$$\int_0^\infty f(\eta) e^{-\eta} \mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n} w(i) f(\eta(i)), \qquad (4)$$

wobei $\eta(i)$ die Nullstellen des Laguerre–Polynoms n–ter Ordnung und $w(i)$ die dazugehörigen Gewichte sind. Da es sich in (3) um einen oszillierenden Integranten handelt, dessen Konvergenzverhalten zudem von vier Parametern ($\Re(\gamma)$, $\tan\varphi, k_0$ und dem Abstand $R(P',Q)$) abhängt, ist es notwendig zu prüfen, durch welche Anzahl an Nullstellen n das Integral approximiert werden kann. Beispielhaft soll hierbei die Konvergenz des Integrals in Abhängigkeit von $\Re(\gamma)$ und $R(P',Q)$ gezeigt werden. Dabei wurde $\tan\varphi = 1$ und $k_0 = 1$ gesetzt. Abb. 1 zeigt die Anzahl an Nullstellen n, die notwendig sind, um das Integral (I) in (3) gemäß dem Konvergenzkriterium $|I(n-1) - I(n)| < 5 \cdot 10^{-4}$ zu bestimmen, als

Konturplot über $\Re(\gamma)$ und $R(P', Q)$. Wie die Abb. 1 zeigt, konvergiert das Integral in Richtung der Extreme $\Re(\gamma) \to 0$ und $\Re(\gamma) \to \infty$, die die idealisierten Fällen der schallharten bzw. schallweichen Ebene repräsentieren, sehr schnell, wohingegen sich ein kritischer Bereich um $\Re(\gamma) \approx 7 \cdot 10^{-1}$ abzeichnet. Für die anderen Parameter wurden ebensolche Untersuchungen vorgenommen. Aus ihnen kann generell geschlussfolgert werden, dass eine besonders ungünstige Konfiguration auftritt, wenn sich das schwingende Objekt sehr nah über der Ebene befindet und die Frequenz und $\tan\varphi$ sehr hoch sind.

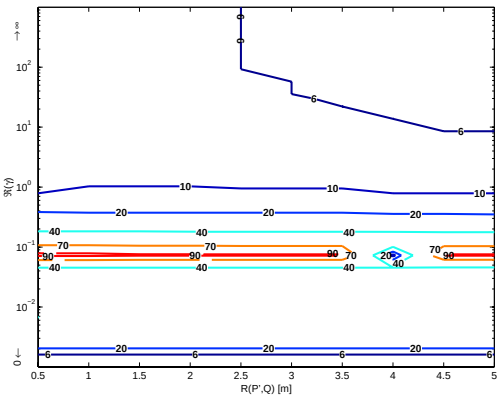

Abbildung 2: Notwendige Anzahl an Nullstellen n für die Lösung des Integral in (3) in Abhängigkeit von $\Re(\gamma)$ und $R(P', Q)$

Da diese Tendenzen jedoch nicht linear verlaufen, d.h. immer wieder durch Bereiche besonders schneller bzw. langsamer Konvergenz durchbrochen werden, ist es ratsam, die notwendige Nullstellenanzahl für jede Einzelfallberechnung zu prüfen. Allgemein lässt sich festhalten, dass die Ableitung $\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}$ sehr viel schneller und sicherer konvergiert, so das die Greensche Funktion $G(P, Q)$ selbst den ausschlaggebende Faktor für die Wahl von n darstellt.

Test

Um die Richtigkeit der BEM-Lösung zu prüfen, wurde eine Testkonfiguration gewählt, die in [7] vorgeschlagen wird. Dabei wird aus dem Verhältnis von Schalldruck und der Schnelle in Normalrichtung der Ebene an einen Feldpunkt in der Ebene auf die Ebenenimpedanz zurückgeschlossen, die für die Berechnung der Feldgrößen mit dem BEM–Programm als Eingangsgröße vorgegeben wurde. Kann die verwendete Greensche Funktion die Randbedingung nachbilden und wurde sie korrekt in das BEM–Programm implementiert, müssen gegebene und berechnete Impedanz übereinstimmen. Für den Testfall wurde $Z_B = (0.4 + 0.8i)Z_0 k_0$ gewählt. Das schallabstrahlende Objekt ist eine atmende Kugel mit dem Radius von 0.5m, deren Zentrum sich 3m über der Ebene befindet. Die Kugeloberfläche wird durch 296 konstante Elemente approximiert. Der Feldpunkt liegt bei P[0 0 0]. Abb. 3 zeigt die hervorragende Übereinstimmung der gegebenen und berechneten Impedanz. Die an $\Im(Z)$ abgetragenen Zahlen geben die Anzahl an Nullstellen für die Gauss-Laguerre Quadratur an, wie sie für die Lösung der Oberflächen–BEM verwendet wurden.

Schlussfolgerung

Für den bisher untersuchten Fall einer Impedanzebene mit Massencharakter $\Im(Z_B) > 0$ konnte die in [5] und [7] hergeleitete Lösung für das Schallfeld einer Punktquelle über lokal wirksamer Absorberebene erfolgreich in eine Matlab®–BEM–Toolbox implementiert werden. Die Tests zeigen, das die Randbedingung auf der Oberfläche der Absorberebene mit dem BEM-Programm hervorragend nachgebildet werden kann.

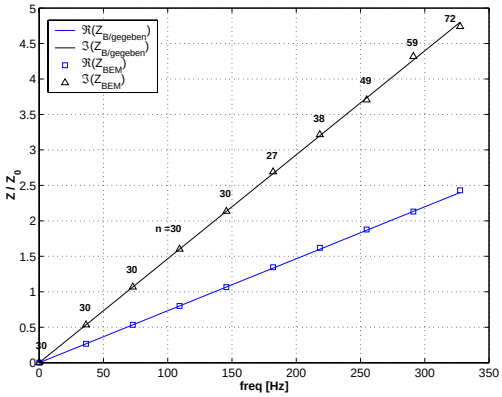

Abbildung 3: Gegebene Impedanz der Ebene Z_B/Z_0 und berechnete Impedanz Z_{BEM}/Z_0 im Vergleich

Poröse Böden stellen jedoch Absorberebenen mit Federcharakter dar, $\Im(Z_B) < 0$, d.h. der Federfall ist der weitaus relevantere, was die Simulation von Schallabstrahlung oder –streuung in realen Situation betrifft. Die Implementation des Federfalls soll demnächst realisiert werden.

Danksagung

Diese Arbeit wurde durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (Projektträger „Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen „Otto von Guericke“ e. V. (AiF)“) gefördert.

Literatur

[1] K. Attenborough. Sound propagation close to the ground. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34:51–82, 2002.

[2] K. Attenborough, S.I. Hayek, and J.M. Lawther. Propagation of sound above a porous half-space. *J. Acoust. Soc. Am.*, 68(5):1493–1501, 1980.

[3] H. Brick, M. Ochmann, and E. Brenck. Simulation of the sound radiation from wheel-like structures using the boundary element method. *Forum Acusticum, Sevilla*, 2002.

[4] M.E. Delany and E.N. Bazley. Monopole radiation in the presence of an absorbing plane. *Journal of Sound and Vibration*, 13(3):269–279, 1970.

[5] D. Habault and P.J.T. Filippi. Ground effect analysis: Surface wave and layer potential representations. *Journal of Sound and Vibration*, 79(4):529–550, 1981.

[6] V.I. Krylov. *Approximate Calculation of Integrals.* The Macmillan Company, New York, 1962.

[7] W.L. Li, T.W. Wu, and A.F. Seybert. A half-space boundary element method for acoustic problems with a reflecting plane of arbitrary impedance. *Journal of Sound and Vibration*, 171(2):173–184, 1994.

[8] A.F. Seybert and B. Soenarko. Radiation and scattering of acoustic waves from bodies of arbitrary shape in a three–dimensional half space. *Transaction of the ASME, Journal of Vibration, Stress and Reliability in Design*, 110(1):112–117, 1988.

[9] S-I. Thomasson. Asymptotic solution for sound propagation above an impedance boundary. *Acustica*, 45:122–125, 1980.

[10] T.W. Wu, editor. *Boundary Element Acoustics: Fundamentals and Computer Codes.* WIT Press, Southampton, Boston, 2000.