

Schallabstrahlung einer kugelsymmetrischen Flamme

Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Technische Fachhochschule Berlin, FB Mathematik - Physik – Chemie
Luxemburger Str. 10, 13353 Berlin, Email: piscoya@tfh-berlin.de, ochmann@tfh-berlin.de

Einleitung

Ein simples Modell einer Flamme besteht aus einem kugelförmigen Volumen heißer Luft mit einer gewissen Quellverteilung, umgeben von Luft bei Raumtemperatur [1]. Wenn die Quellverteilung nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, kann das 3D-Problem auf ein eindimensionales Problem reduziert und für spezifische Quellverteilungen analytisch gelöst werden. In der vorliegenden Arbeit wird die *Dual Reciprocity Boundary Element Method* (DRBEM) in ein numerisches Verfahren überführt, um das Volumenintegral der Quellfunktion mit geringem Rechenaufwand auswerten zu können. Die Genauigkeit der Methode wird durch den Vergleich der Ergebnisse mit der analytischen Lösung überprüft. In weiteren Arbeiten soll diese Methode auch auf Quellverteilungen mit beliebiger Geometrie angewandt werden

Problembeschreibung

Das Flammenmodell besteht aus einem kugelförmigen Volumen heißer Luft mit Radius a , Dichte ρ_1 , Schallgeschwindigkeit c_1 und einer (frequenzabhängigen) Schallquellverteilung Q_ω . Die Flamme ist von Luft mit den Konstanten ρ_0 und c_0 umgeben.

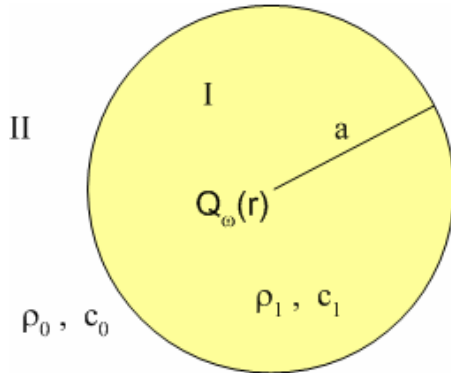


Abbildung 1: Kugelsymmetrische Flamme.

Zur Bestimmung der Schallabstrahlung wird der Raum in zwei Regionen aufgeteilt und die Helmholtz-Gleichung in jeder Region gelöst [1]

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k_1^2)p_I &= Q_\omega & \text{Region I} \\ (\nabla^2 + k_0^2)p_{II} &= 0 & \text{Region II} \end{aligned} \quad (1)$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} p_I &= p_{II} & , & \quad r = a \\ \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_I}{\partial r} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_{II}}{\partial r} & , & \quad r = a \end{aligned} \quad (2)$$

Analytische Lösung

Für spezielle Q_ω kann das Problem analytisch gelöst werden. Wir analysieren den Fall $Q_\omega = -Q$, mit Q konstant über die Frequenz. Die Lösung für diesen Fall ist:

$$\begin{aligned} p_I &= Q(Aj_0(k_1 r) - 1) / k_1^2 & r \leq a \\ p_{II} &= T e^{-jk_0 r} / r & r \geq a \end{aligned} \quad (3)$$

wobei die Konstanten A und T durch die Randbedingungen (2) bestimmt werden.

Numerische Lösung

Wie in den Randelementeverfahren üblich, werden die Differentialgleichungen (1) in Integralform überführt:

$$\begin{aligned} C_I p_I &= - \int_S \left(p_I^S \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial p_I^S}{\partial r} g_1 \right) dS + \int_V Q g_1 dV \\ C_{II} p_{II} &= \int_S \left(p_{II}^S \frac{\partial g_0}{\partial r} - \frac{\partial p_{II}^S}{\partial r} g_0 \right) dS \end{aligned} \quad (4)$$

mit

$$g_0 = \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi R}, \quad g_1 = \frac{e^{-jk_1 R}}{4\pi R}, \quad R = |\vec{x} - \vec{y}|$$

und

$$C_I = \begin{cases} 1 & r < a \\ 0.5 & r = a \\ 0 & r > a \end{cases}, \quad C_{II} = \begin{cases} 0 & r < a \\ 0.5 & r = a \\ 1 & r > a \end{cases}, \quad r = |\vec{x}|$$

Mittels der DRBEM, wird das Volumenintegral über die Schallquellverteilung in Gl. (4) in eine Reihe von Flächenintegralen umgeformt, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

Die Quellverteilung Q wird hierfür in eine Reihe von Funktionen entwickelt:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j(\vec{x}), \quad (5)$$

wobei N die Anzahl von Punkten am Kugelrand und L die Anzahl von Punkten im Inneren des Volumens ist (Abb. 2). Grundsatz der Methode ist nun, dass den Funktionen f_j Funktionen ψ_j zugeordnet werden, die die Helmholtz-Gleichung lösen:

$$(\nabla^2 + k^2)\psi_j = f_j. \quad (6)$$

Die erneute Anwendung des Randlelementverfahrens auf Gl. (6) führt zu folgender Darstellung:

$$-\int_V f_j g dV = C \psi_j + \int_S \left(\psi_j^s \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\partial \psi_j^s}{\partial r} g \right) dS \quad (7)$$

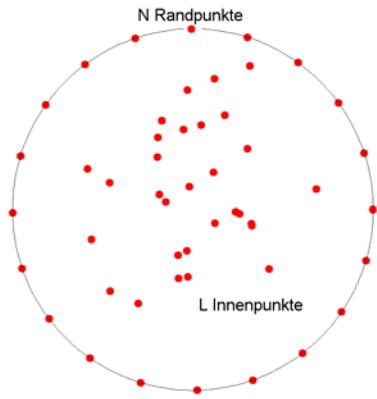


Abbildung 2: Diskretisierungspunkte der DRBEM.

Setzt man (7) und (5) in (4) ein, so werden die Integralgleichungen allein in Form von Flächenintegralen geschrieben:

$$C_I p_I = -\int_S \left(p_I^s \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial p_I^s}{\partial r} g_1 \right) dS + \sum_j \alpha_j \left(C \psi_j + \int_S \left(\psi_j^s \frac{\partial g_1}{\partial r} - \frac{\partial \psi_j^s}{\partial r} g_1 \right) dS \right) \quad (8)$$

Nähere Details der Methode sind in [2] aufgeführt.

Ergebnisse

Es gibt mehrere Alternativen für die Wahl der Funktionen f_j und ψ_j , die jeweils von der Form des Quellterms Q_ω abhängen. In dieser Arbeit wurde folgende Wahl getroffen [3]:

$$f_j(\vec{x}) = 1 + r_j, \quad r_j = |\vec{x} - \vec{y}_j|$$

$$\psi_j(\vec{x}) = \frac{1 + r_j}{k^2} - \frac{2}{k^4} \left(\frac{1 - \cos(kr_j)}{r_j} \right) \quad (9)$$

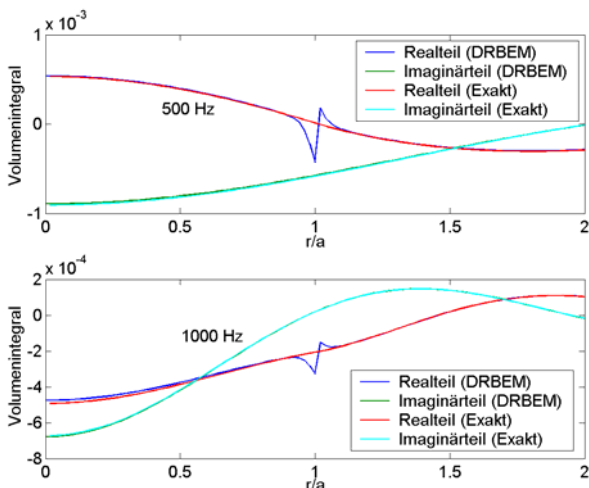


Abbildung 3: Volumenintegral über dem Radius a

Das Kugelmodell bestand aus 640 Elementen. Es wurden 200 Punkte gewählt, die innerhalb der Kugel liegen.

Die Übereinstimmung zwischen den analytischen und den numerischen Ergebnissen ist sehr gut. Abb. 3 zeigt einen Vergleich zwischen den analytischen und den numerischen Werten des Volumenintegrals in mehreren Punkten innerhalb und außerhalb der Kugel und Abb. 4 einen entsprechenden Vergleich für den Schalldruck. Nur in der Nähe der Trennfläche zwischen Region I und II ist die Genauigkeit der Berechnung nicht optimal, aber dieser Fehler hat wenig Einfluss auf die Schallleistung (Abb. 5). Weitere Untersuchungen haben gezeigt, dass die Methode auch für nicht konstante Quellverteilungen gute Ergebnisse liefert.

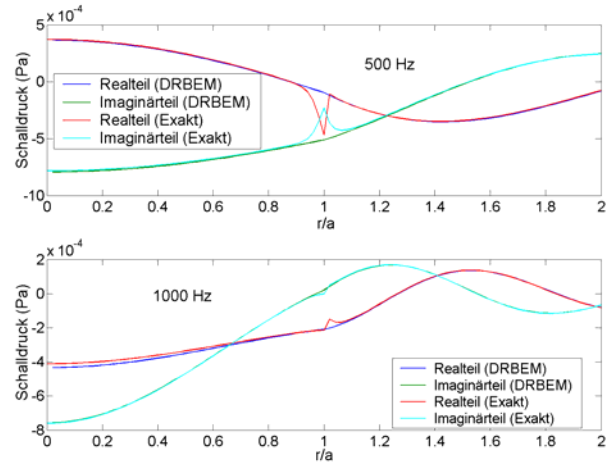


Abbildung 4: Schalldruck über dem Radius

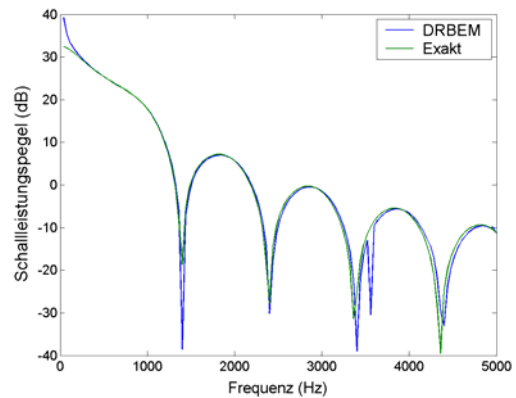


Abbildung 5: Schalleistungspegel über der Frequenz

Diese Arbeit wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft im Rahmen der Forschergruppe "Verbrennungslärm" gefördert.

Literatur

- [1] Crighton, D.G.: Modern methods in analytical acoustics, Chapter 13. Springer-Verlag, London, Berlin, 1992.
- [2] Partridge P.W., Brebbia C.A.: Computer Implementation of the BEM dual reciprocity method for the solution of general field equations. Communications in Applied Numerical Methods 6 (1990), 83-92
- [3] Perrey-Debain E.: Analysis of convergence and accuracy of the DRBEM for axisymmetric Helmholtz-type equation. Engineering Analysis with Boundary Elements 23 (1999) 703-711.