Entwicklung einer Halbraum-BEM zur Simulation der Schallausbreitung über einer Impedanzebene

Haike Brick, Martin Ochmann

TFH Berlin - University of Applied Sciences, FB II, Projektgruppe Computational Acoustics, 13353 Berlin, Email: brick@tfh-berlin.de, ochmann@tfh-berlin.de

Einleitung

Die Boundary-Element-Method (BEM) ist ein sehr leistungsfähiges Verfahren zur Simulation von Schallabstrahlung und Schallstreuung. In ihrer klassischen Form wurde sie für den unbegrenzten Raum entwickelt, sie ist jedoch ebenfalls problemlos für Lösungen im Halbraum erweiterbar, solange der Halbraum durch eine perfekt schallharte bzw. schallweiche Ebene begrenzt wird. Die Greensche Funktion, das Herzstück der BEM, kann in diesem Fall mit Hilfe eines einfachen Spiegelquellenansatz hergeleitet werden. Mit diesem Ansatz kann jedoch eine allgemeine Impedanz-Randbedingung auf der Ebene nicht erfüllt werden. Eine Einbindung der Ebene in das Modell über eine Diskretisierung führt indessen zu einer enormen Erhöhung der Größe des Gleichungssystems und damit des Speicherbedarfs der Berechnungen. In [3] wurde eine geeignete Greensche Funktion zur Beschreibung der Schallausbreitung über einer Impedanzebene vorgestellt, die auf der Superposition von Quellen mit komplexen Quellpunkten beruht. Es wird die numerische Auswertung und Einbindung dieser Greenschen Funktion in eine direkte BEM präsentiert sowie eine Testkonfigurationen zur Verifizierung der entwickelten „Complex-Source-Point-BEM“ (CBEM) vorgestellt.

Theorie

In [3] wurde eine Greensche Funktion für die Schallausbreitung zwischen Sendepunkt $\vec{y} = (x_s,\, y_s,\, z_s)$ und Empfangspunkt $\vec{x} = (x,\, y,\, z)$ vorgestellt, die einerseits die Impedanzrandbedingung auf der Ebene erfüllt und andererseits sowohl für einen Masse- als auch einen Federcharakter der Impedanzebene und für alle Anordungen von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ im Raum konvergiert (mit $\vec{x} \neq \vec{y}$).

$$G(\vec{x},\vec{y}) = \frac{e^{-jkr(z_s)}}{4\pi r(z_s)} + \frac{e^{-jkr(-z_s)}}{4\pi r(-z_s)} + \frac{j\gamma}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+(z+z_s+j\varsigma)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z+z_s+j\varsigma)^2}} e^{-j\gamma\varsigma}, \qquad (1)$$

mit $r(z_s) = \sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2+(z-z_s)^2}$. ρ ist der horizontale Abstand zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$, $\rho = \sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}$. Der Wert γ ergibt sich aus der normierten Impedanz der Ebene Z_0, $\gamma = jk/Z_0$ mit $Z_0 = Z_p/(\rho_0 c_0)$. Z_p ist die Impedanz der Ebene, $\rho_0 c_0$ die Impedanz des umgebenen Fluids. $k = \omega/c_0$ ist die Wellenzahl, die Zeitkonvention ist $e^{j\omega t}$. Eine ausführliche Darstellung der Theorie ist in [3] und [4] zu finden.

Numerische Auswertung

Die Schwierigkeit besteht in der Bestimmung des uneigentlichen Integrals in (1), welches durch die Welligkeit des Integranden und einer möglichen Nadelspitze bei $\varsigma \approx -\rho$ eine sorgfältige und mithin aufwändige Auswertung erfordert. Eine sehr zuverlässige Methode ist die adaptive Multigrid-Quadratur, die in [2] vorgestellt wurde. Sie setzt allerdings eine Festlegung einer geeigneten unteren Intervalgrenze des Integrals voraus. In manchen Fällen, für $\mathrm{Im}(\gamma) > 1$, lässt sich die Gauss-Laguerre-Quadratur [6] anwenden, was zu einer deutlichen Beschleunigung der Berechnung führt.

Testfall - senkrechter Schalleinfall

Die erfolgreiche Implementation der Greenschen Funktion in eine direkte BEM-Anwendung soll anhand des folgenden Testfalles dargestellt werden. Für den Fall, dass Sende- und Empfangspunkt senkrecht übereinander liegen, existiert eine exakte Lösung für Gl. (1)

$$G_{\text{exakt}}(\vec{x},\vec{y}) = G_0(\vec{x},\vec{y}) - \frac{jk}{2\pi Z_0} e^{jk\,(z+z_s)/Z_0} E_1\left(jk\,(z+z_s)\left(1+\frac{1}{Z_0}\right)\right). \qquad (2)$$

Gl. (2) kann für Feldpunkte weit oberhalb der Impedanzebene zu einer „plane wave“ -Approximation vereinfacht

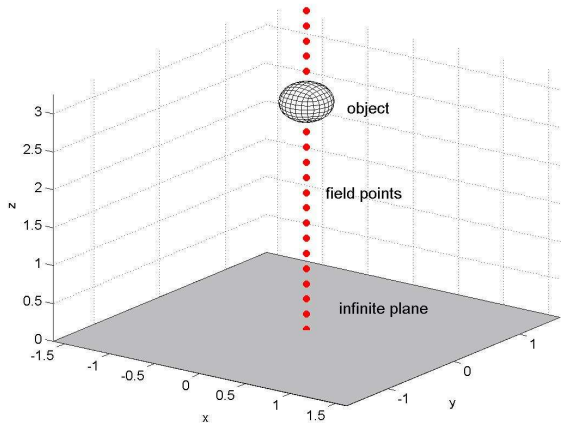

Abbildung 1: Schallquelle über einer Impedanzebene, die Feldpunkte liegen auf einer senkrechten Linie mit $x = (0,\, 0,\, z)$

werden:

$$G_{\text{plane}}(\vec{x},\vec{y}) = \frac{e^{-jkr(z_s)}}{4\pi r(z_s)} + \frac{Z_0-1}{Z_0+1}\,\frac{e^{-jkr(z_s)}}{4\pi r(z_s)}. \qquad (3)$$

Die Geometrie der Testkonfiguration zeigt Abb. 1. Eine Kugel befindet sich über einer Impedanzebene mit $\gamma = -1 + 0.5j$, d.h. die Impedanzebene ist mit eine Federcharakteristik ausgezeichnet. Der Kugelmittelpunkt liegt bei (0, 0, 3m), die Wellenzahl sei $k = 1\ \text{m}^{-1}$. Die Feldpunkte liegen auf einer senkrechten Linie unter- und oberhalb des Kugelmittelpunktes bei $\vec{x}_{\text{FP}} = (0, 0, z)$. Die Kugel schwingt mit einer Schnelleverteilung, die ihr durch eine virtuelle Monopolquelle in ihrem Mittelpunkt $\vec{y}$ aufgeprägt wird. Durch die Anwesenheit der Ebene ist die Kugelschwingung jedoch nicht mehr uniform, sondern muss anhand Gl. (1) festgelegt werden, damit die diskrete Struktur das Schallfeld der Monopolquelle ideal weiterträgt ohne es selbst zu beeinflussen. Die Schnelle v_n in den Knotenpunkten oder Elementmittelpunkten $\vec{x}$ der diskreten Struktur sind somit durch

$$v_n(\vec{x}) = \frac{j}{\omega\rho_0} A_p \frac{\partial G(\vec{x},\vec{y})}{\partial \vec{n}_x} \qquad (4)$$

gegeben. A_p ist hier die Quellstärke der im Inneren der Kugel liegenden Monopolquelle.

Über Gl. (2) lässt sich der exakte Schalldruck p_{exakt} in den Feldpunkten berechnen. Der Fehler E gibt an, wie stark die Lösung für den Feldpunktschalldruck von der exakten Lösung abweicht,

$$E_i = \sqrt{\frac{|p_i - p_{\text{exakt}}|^2}{|p_{\text{exakt}}|^2}}, \qquad (5)$$

mit p_i als Schalldruck an den Feldpunkten aus der „plane wave“ -Approximation bzw. der CBEM-Lösung. Abb. 2 zeigt diesen Fehler. Zusätzlich zu E_{CBEM} und $E_{\text{plane wave}}$ ist in Abb. 2 auch der Fehler des Monopoltestes E_{Monopol} eingetragen, der den allgemeinen Diskretisierungsfehler der numerischen Lösung repräsentiert, [5]. Es ist zu sehen, dass der Fehler der CBEM in der Größenordnung des Diskretisierungsfehlers, in diesem Fall bei 1%, liegt. Das heisst, das der Schalldruck in den Feldpunkten hervorragend durch das Modell approximiert wird und die CBEM und die Implementation der Greensche Funktion (1) damit verifiziert ist. Der „plane wave“ -Ansatz führt in der Nähe der Ebene erwartungsgemäß zu einem hohen Fehler, nähert sich aber mit zunehmendem Abstand der Feldpunkte zur Ebene jedoch der exakten Lösung an, womit diese und die CBEM-Lösung eine weitere Bestätigung erhalten. Weitere Testfälle zur Verifikation der CBEM sind in [4] beschrieben.

Zusammenfassung

Eine Greensche Funktion, die die Schallausbreitung über einer Impedanzebene beschreibt, wurde erfolgreich in eine direkte BEM-Anwendung implementiert. Durch die Eigenschaften der verwendeten Greenschen Funktion sind keine Einschränkungen für die Gültigkeit der resultierenden CBEM gegeben. Es sind Ebenen mit

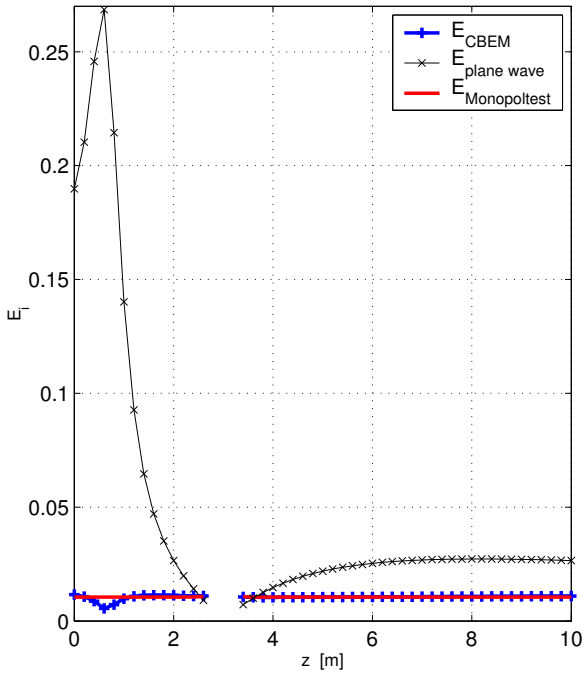

Abbildung 2: Fehler der plane-wave-Approximation und der CBEM-Lösung gegenüber der exakten Lösung sowie Monopolfehler

Massen- sowie Federcharakter erlaubt als auch senkrecht übereinander liegende Sende- und Empfangspunkte, wie der vorgestellte Testfall zeigt. Das stellt einen deutlichen Gewinn gegenüber bisherigen BEM-Lösungen für Halbräume dar.

Literatur

[1] Brick, H., Ochmann, M.: Eine BEM-Toolbox zur Berechnung der Schallabstrahlung schwingender Strukturen vor Hindernissen und über absorbierendem Boden. DAGA'2003 542–543, Aachen

[2] Deuflhard, P., Hohmann. A.: Numerische Mathematik I - Eine algorithmisch orientierte Einführung. Chapter 9.7. 343–351, de Gruyter, Berlin, New York, 1993

[3] Ochmann, M.: The complex equivalent source method for sound propagation over an impedance plane. Journal of the Acoustical Society of America 116 (2004), 3304–3311

[4] Ochmann, M., Brick, H.: Acoustical Radiation and Scattering above an Impedance Plane. In: Marburg, S., Nolte, B. (Editoren): Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids. Finite and Boundary Element Methods. Chapter 17, 459–494, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[5] Ochmann, M., Osetrov, A.V. Construction of analytical solutions for the error estimation of acoustical boundary element solvers. In: Proceedings of the Forum Acusticum, Sevilla, Spain, 1000–1004, 2002.

[6] Krylov, V.I.: Approximate Calculation of Integrals. The Macmillan Company, New York, 1962.