Stabilitätsverhalten und Ergebnisse der transienten Randelementmethode für akustische Außenraumprobleme

Michael Stütz[1], Martin Ochmann[2]

[1] TFH Berlin - University of Applied Sciences, Fachbereich II, Email: stuetz@tfh-berlin.de

[2] TFH Berlin - University of Applied Sciences, Fachbereich II, Email: ochmann@tfh-berlin.de

Einleitung

Berechnungen der Boundary Element Methode (BEM) werden üblicherweise im Frequenzbereich ausgeführt, d.h. jede Frequenz muss einzeln berechnet werden. Dies beschränkt die Anwendung der Methode auf die Simulation von stationären Vorgängen. Für die Simulation transienter Vorgänge, wie z.B. bewegter Quellen, von Impulsen usw., muss die Berechnung im Zeitbereich durchführt werden. Die Berechnung im Zeitbereich erfolgt schrittweise in der Zeit und der so erhaltene Zeitverlauf liefert Ergebnisse über ein ganzes Spektrum von Frequenzen. Die Grundlagen für die Zeitbereichs-BEM (TD-BEM) wurden schon 1960 von Friedman und Shaw [1] und später 1968 von Cruse und Rizzo [2] veröffentlicht. Erste Anwendungen auf die Wellengleichung erfolgten jedoch erst 1983 von Mansur [3] mit zunehmender Verbreitung leistungsfähiger Rechner. Seitdem wird diese Methode kontinuierlich weiterentwickelt, wobei jedoch die Frequenzbereichsalgorithmen einen deutlichen Entwicklungsvorsprung aufweisen.

Das numerische Modell

Eine detaillierte Herleitung der hier verwendeten Randintegralgleichung kann z.B. bei Meise [4] gefunden werden:

$$4\pi d p(x,t) = \int_\Gamma \frac{1}{r} q(y, t-r/c) d\Gamma_y + \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n_y}\left[\frac{1}{r^2} p(y,t-r/c) + \frac{1}{rc}\dot{p}(y,t-r/c)\right] d\Gamma_y, \quad (1)$$

wobei p der Schalldruck, q der Schallfluss, c die Schallgeschwindigkeit, Γ die Oberfläche der Struktur, d der innere Raumanteil und $r = |x-y|$ der Abstand des Quellpunktes y und des Beobachtungspunktes x ist.

Die Zeit t wird in i äquidistante Zeitschritte unterteilt $t_i = i\Delta t$, womit man für die retardierte Zeit $t_{ri} = i\Delta t - \frac{r}{c}$ erhält. Für q wird ein konstanter Zeitansatz und für p ein linearer Zeitansatz gewählt.

$$q(y, t_i) = \sum_{m=1}^{i} q_m \quad (2)$$

$$p(y, t_{ri}) = \sum_{m=1}^{i}\left(\frac{t_m - t_{ri}}{\Delta t} p_{m-1} + \frac{t_{ri} - t_{m-1}}{\Delta t} p_m\right) \quad (3)$$

mit $t_{m-1} \leq t_{ri} \leq t_m$. $\dot{p}$ wird durch einen Rückwärtsdifferenzenquotient approximiert

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{m=1}^{i}\left(\frac{p_m - p_{m-1}}{\Delta t}\right). \quad (4)$$

Die Struktur wird in N ebene Elemente mit konstanter Druck und Schallflußverteilung geteilt. Mit den beschriebenen Ansätzen ergibt sich die Randintegralgleichung zu

$$4\pi d p_i(x) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{i}\left[\int_\Gamma \frac{1}{r} q_m^n d\Gamma_y + \int_\Gamma \frac{\partial r}{\partial n_y}\frac{1}{r^2}\left[(i-m+1)p_m^n - (i-m)p_{m-1}^n\right] d\Gamma_y\right]. \quad (5)$$

Wenn man nun für x jeweils die Elementmittelpunkte einsetzt (Kollokationsmethode) erhält man ein Gleichungssystem, welches es zu lösen gilt. Im Gegensatz zur BEM im Frequenzbereich (FD-BEM) ist die zu lösende Systemmatrix nur sehr dünn besetzt, da je Zeitschritt und Kolokationspunkt jeweils nur über die Strukturoberfläche integriert wird, welche innerhalb der Kugelschale mit äußerem Radius $(i-m+1)c\Delta t$ und innerem Radius $(i-m)c\Delta t$ liegt (siehe Abb. 1). Im Gegensatz zur FD-BEM, wo über ganze Elemente integriert wird, muss in der TD-BEM das Problem gelöst werden, nur über den Teil des Elementes zu integrieren, der in dieser Kugelschale liegt. Der Einsatz iterativer Methoden zur Lösung des Gleichungssystems ist auf Grund der dünn besetzten Systemmatrix vorteilhaft. Das Verfahren der konjugierten Gradienten und die LSQR-Methode lieferten gute Resultate.

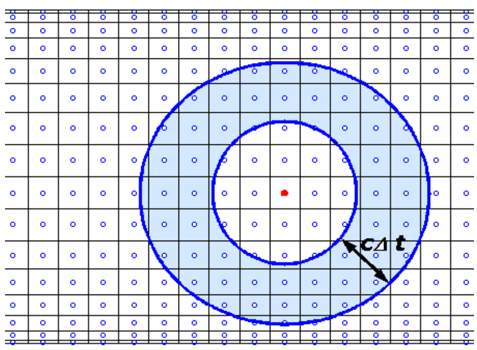

Abbildung 1: Bei jedem Zeitschritt muss je Kollokationspunkt über die Schnittfläche des Randes mit einer Kugelschale mit Innenradius $(i-m)c\Delta t$ und Außenradius $(i-m+1)c\Delta t$ integriert werden

Genauigkeit und Stabilität der Methode

Die Genauigkeit und Stabilität der TD-BEM wurde am Beispiel der Schallabstrahlung von einfachen Strukturen in den Außenraum untersucht. Das Verhältnis der Zeitschrittweite Δt und der Elementgröße h ist hierbei ein wichtiges Kriterium. Dieses Verhältnis wird folgendermaßen definiert $\beta = c\Delta t/h$. Wie man in Abb. 2 erkennen kann, liefert die Simulation einer atmenden Kugel mit $1,37 < \beta < 1,52$ gute Ergebnisse. Die Schallabstrahlung einer Kugel in den Außenraum zeigt einen deutlichen Einfluss der Innenraumfrequenzen (siehe Abb. 3). Dieser Zusammenhang wurde bis jetzt noch nicht mathematisch bewiesen. Weiterhin ist der Einfluss der Eigenfrequenzen stark abhängig vom Verhältnis β. Schon kleine Veränderungen dieses Verhältnisses, können den Einfluss der Eigenfrequenzen stark verändern. Generell lässt sich aber sagen, dass bei kleinen Werten der Einfluss der Eigenfrequenzen besonders stark ist, jedoch kam es bei keinem der Untersuchten Fälle zu instabilem Verhalten, d.h. zu einem exponentiellem Anstieg des Schalldrucks.

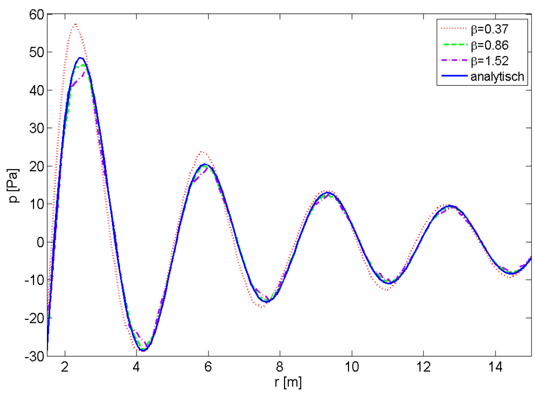

Abbildung 2: Abhängigkeit von der Zeitschrittweite

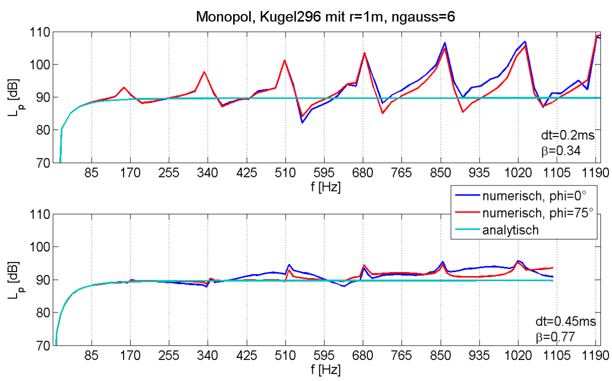

Abbildung 3: Einfluss der Eigenfrequenzen der Kugel auf die Schallabstrahlung für β =0,34 und 0,77

Anwendungsbeispiel

Zu Testzwecken wurde die Schallabstrahlung einer offenen turbulenten Flamme berechnet und mit Simulationsergebnissen einer Frequenzbereichs-BEM verglichen. Hierfür standen Daten und Rechenergebnisse des Forschungsprojektes 'Modellierung der Schallabstrahlung von Flammen mit akustischen Ersatzstrahlern' zur Verfügung. Für den Vergleich der transienten BEM mit den Daten aus dem Frequenzbereich werden die Zeitergebnisse mittels FFT in den Frequenzbereich überführt. Die Ergebnisse für zwei unterschiedliche Flammentypen sind in Abb. 4 dargestellt. Der Vergleich der TD-BEM mit der FD-BEM zeigt recht gute Übereinstimmung der Rechenergebnisse im Frequenzbereich zwischen 400-3000Hz. Messergebnisse und Simulationsergebnisse stimmen bei der HD-Flamme gut überein, bei der H3-Flamme kommt es jedoch zu starken Abweichungen.

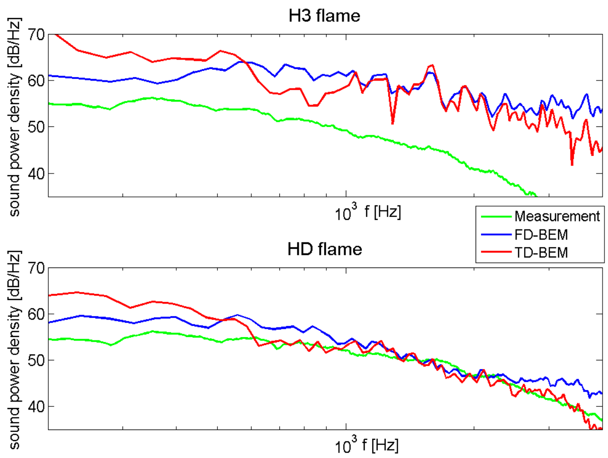

Abbildung 4: Schalleistungsdichte HD/H3-Flamme gemessen und simuliert

Zusammenfassung und Ausblick

Die TD-BEM ist eine vielversprechende Methode zur Berechnung der Schallabstrahlung transienter Vorgänge. Um akkurate Simulationsergebnisse zu gewährleisten, muss eine Methode zur Regularisierung der Innenraumresonanzen entwickelt werden. Hierfür bieten sich die im Frequenzbereich verwendete Chief Methode oder die Burton-Miller-Methode an.

Literatur

[1] M. Friedmann, R. Shaw: Diffraction of pulses by cylindical Obstacles of Arbitrary cross Section, J. Appl. Mech.,Vol. 29 (1962), S.40-46

[2] T.A. Cruse, F.J. Rizzo: A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem I, J. Math. Analysis and Applic., Vol.22 (1968), S.244-259

[3] Mansur, W. J.: A Time-Stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary Element Method, PhD thesis, University of Southampton, 1983

[4] Meise T.: BEM calculation of scalar wave propagation in 3-D frequency and time domain (in German). PhD Thesis, Technical Reports Nr.90-6, Fakultät für Bauingenieurwesen, Ruhr-Universität, Bochum, Germany; 1990