Berechnung der Schalldämmung endlicher Platten durch eine Kombination von numerischer Modalanalyse und BEM

Rafael Piscoya, Martin Ochmann

Beuth Hochschule für Technik Berlin, 13353 Berlin,
E-Mails: piscoya@beuth-hochschule.de, ochmann@beuth-hochschule.de

Einleitung

Die Abschätzung der Isoliereigenschaften plattenartiger Strukturen hat große Bedeutung in der Raum- und Bauakustik. Numerische Bewertungen der Schalldämmung dieser Strukturen ermöglichen eine schnelle Beurteilung der Wirkung von Gestaltänderungen der Trennwände und erlauben dadurch, die Anzahl der notwendigen Messungen zu reduzieren. Solche Abschätzungen können durch die Kombination einer numerischen Modalanalyse für die Platte und einer BE-Formulierung für die Schallabstrahlung gewonnen werden. Für flache Platten in einer Schallwand vereinfacht sich die BEM zu einem Rayleigh-Integral. Die Verwendung einer Modalbasis kann die Größe des zu lösenden Gleichungssystems erheblich verringern. Die Eigenmoden der Platten werden numerisch mit Hilfe einer FE-Formulierung berechnet. Ergebnisse der Schalldämmung isotroper homogener Platten mit unterschiedlichen Randbedingungen werden gezeigt. Die Methode kann natürlich auch auf kompliziertere Fälle wie orthotrope oder profilierte Platten angewandt werden.

BE-Formulierung

Wir untersuchen die Transmission einer ebenen schräg einfallenden Welle durch eine endliche dünne Platte, die sich in einer unendlichen Wand befindet (Abb. 1). Die Medien hinter und vor der Platte können unterschiedlich sein.

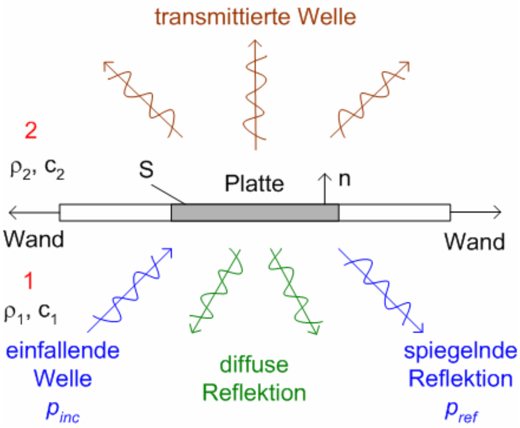

Abbildung 1: Akustisches Transmissionsproblems.

Die ebene Welle im Raum 1 setzt die Platte in Bewegung. Die Schwingung der Platte erzeugt Schallwellen, die sich im beiden Räumen ausbreiten. Die Schalldrücke auf beiden Seiten der unendlichen Wand lauten [1]

$$p_1 = p_{inc} + p_{ref} + \int_S \frac{\partial p_1^S}{\partial n} g_{H,1} dS \tag{1}$$

$$p_2 = -\int_S \frac{\partial p_2^S}{\partial n} g_{H,2} dS \tag{2}$$

wobei p_{ref} der spiegelnden Reflektion entspricht. g_{H1} und g_{H2} sind die Greenschen Funktionen im jeweiligen Halbraum mit verschwindender Normalableitung auf der Wand.

$$g_{H,1} = \frac{e^{-jk_1|\vec{x}-\vec{y}|}}{2\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \;,\; g_{H,2} = \frac{e^{-jk_2|\vec{x}-\vec{y}|}}{2\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{3}$$

$$\frac{\partial g_{H,1}}{\partial n} = \frac{\partial g_{H,2}}{\partial n} = 0\,. \tag{4}$$

Nach der Diskretisierung der Platte mit N konstanten Elementen (d.h. akustische Größen sind gleich über einem Element) und unter der Annahme, dass die Verschiebung der Platte u auf beiden Seiten gleich ist,

$$\frac{\partial p_1^S}{\partial n} = \rho_1 \omega^2 u \;,\; \frac{\partial p_2^S}{\partial n} = \rho_2 \omega^2 u \;, \tag{5}$$

können wir Gl. (1) und (2) in Matrixform schreiben

$$p_1^S = p_{inc}^S + p_{ref}^S + \rho_1 \omega^2 G_{H1} u \tag{6}$$

$$p_2^S = -\rho_2 \omega^2 G_{H2} u \tag{7}$$

p_1^S, p_2^S, p_{inc}^S, p_{ref}^S und u sind Vektoren und G_{H1} und G_{H2} die üblichen BEM-Matrizen.

FE-Formulierung

Die Verschiebung der Platte u kann durch die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\left(K - \omega^2 M\right) u = F \tag{8}$$

bestimmt werden. K ist die Steifigkeitsmatrix, M die Massenmatrix und F der Vektor der äußeren Kräfte.

Setzt man F zu Null, geht Gl. (8) in ein allgemeines Eigenwertproblem über, dessen Lösung die Eigenfrequenzen ω_i und Eigenmoden ϕ_i der Platte liefert.

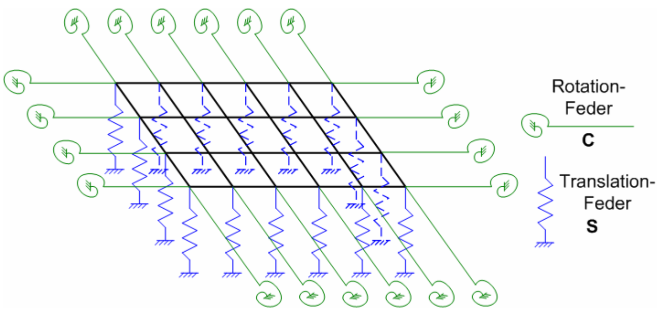

Abbildung 2: Platte befestigt an unendlicher Wand durch Federelemente.

Die Eigenmoden erfüllen zusätzlich die Randbedingungen. Die üblichen RB sind: freier, gelenkig gelagerter und eingespannter Rand. Andere RB können konstruiert werden, indem man den Plattenrand und die unendliche Wand durch Feder-Elemente (Torsionsfedern C und Translationsfedern S) verbunden sind.

Die Verschiebung der Platte kann in eine Reihe von Eigenmoden entwickelt werden

$$u(x,y) = \sum d_i \phi_i(x,y) \quad \rightarrow \quad u = \Phi d \tag{9}$$

(Φ ist die Matrix der Eigenvektoren). Daher liefert die Lösung von (8) die Amplituden der Eigenmoden d_i. Wenn die Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix normiert sind, gelten folgende Beziehungen

$$\phi_i^T M \phi_j = \delta_{ij} \qquad \phi_i^T K \phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \tag{10}$$

Gekoppeltes Problem

Für das Transmissionsproblem sind Schallabstrahlung und Plattenschwingung gekoppelt, weil die Druckschwankungen die Platte anregen [2]

$$F_i = \left(p_{i1}^S - p_{i2}^S\right) A_i \qquad \text{für das } i\text{-te Element} \tag{11}$$

wobei A_i der Fläche des Elements entspricht.

Durch die Kombination der Gleichungen (6) - (8) und (11) erhält man die Matrixgleichung für die Verschiebung der Platte

$$\left(K - \omega^2 M + j\omega(Z_1 + Z_2)\right)u = A\left(p_{inc}^S + p_{ref}^S\right) \tag{12}$$

mit $Z_1 = j\rho_1 \omega A G_{H1} \quad Z_2 = j\rho_2 \omega A G_{H2}$

Setz man (9) in (12) ein und multipliziert (12) von links mit Φ^T bekommt man die Matrixgleichung für die unbekannten Koeffizienten d

$$\left(\omega_R^2 - \omega^2 I + j\omega\left(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2\right)\right)d = \tilde{p}^{bp} \tag{13}$$

wobei ω_R^2 eine Diagonalmatrix $diag(\omega_1^2, \omega_2^2, ..., \omega_N^2)$ ist und

$$\tilde{Z}_{1,2} = \Phi^T Z_{1,2} \Phi \quad , \quad \tilde{p}^{bp} = \Phi^T A\left(p_{inc}^S + p_{ref}^S\right)$$

Die Matrizen in (12) haben die Größe $N \times N$ während die Matrizen in (13) die Größe $n \times n$ ($n<N$). Die Verwendung einer Modalbasis kann die Größe des zu lösenden Systems stark verringern, da die Anzahl von Eigenmoden bei tiefen und mittleren Frequenzen im Allgemeinem viel kleiner ist als die Anzahl der Elemente.

Ergebnisse

Die Schalltransmission wird charakterisiert durch den Transmissionsgrad τ. In der Praxis verwendet man jedoch das Schalldämmmaß $R = -10 \log \tau$. Der Transmissionsgrad wird definiert als das Verhältnis von einfallender zu transmittierter Schallleistung. In Abb. 3 sind die Kurven des Schalldämmmaßes für zwei unterschiedliche Platten dargestellt. Man sieht, dass das Medium einen sichtbaren Einfluss auf R der leichten Platte hat. In Abb. 4 wird der Einfluss der Randbedingungen auf R gezeigt. Die Maxima und Minima haben verschiedene Werte, weil die Eigenfrequenzen von den Randbedingungen abhängen.

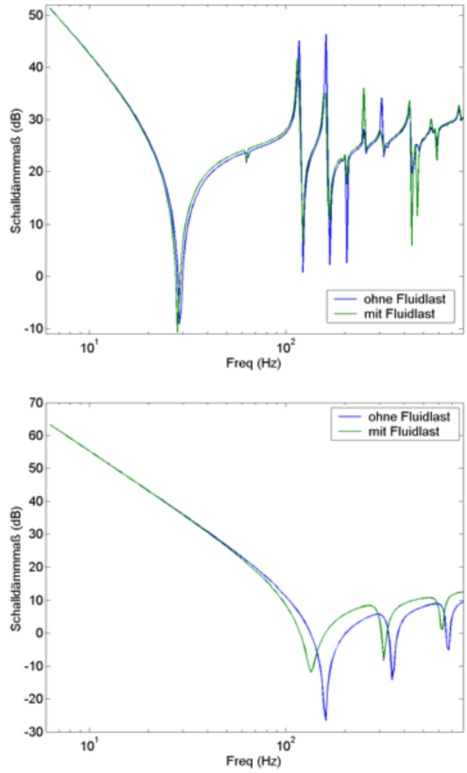

Abbildung 3: Schalldämmmaß einer a) schweren Platte (oben); b) leichten Platte (unten).

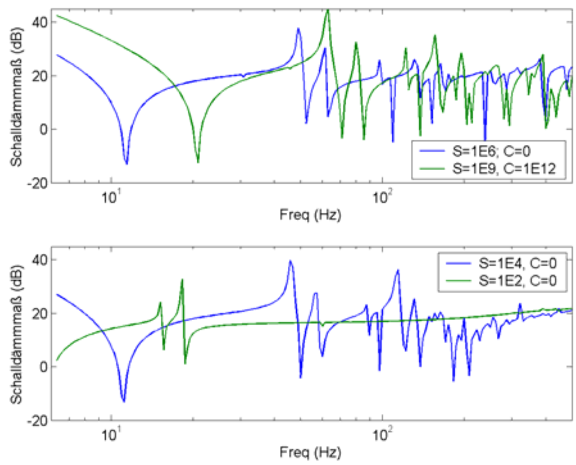

Abbildung 4: Schalldämmmaß einer Stahlplatte bei verschiedenen Randbedingungen.

Diese Arbeit wurde durch die DFG im Rahmen des Projektes "Das akustische Transmissionsproblem für plattenartige Strukturen (ATMOS)“ gefördert.

Literatur

[1] T. W. Wu „Boundary Element Acoustics“ WIT Press, 2000.

[2] Amini S., Harris P.J., Wilton D.T., Coupled Boundary and Finite Element Methods for the Solution of the Dynamic Fluid-Structure Interaction Problem, Springer-Verlag, 1992.