Multipol-Schallquellen in der Multi-Level Fast-Multipol-Methode

Ralf Burgschweiger, Christian Steuck, Martin Ochmann
Beuth Hochschule für Technik Berlin, Fachbereich II, Projektgruppe Computational Acoustics

BEUTH HOCHSCHULE FÜR TECHNIK BERLIN
University of Applied Sciences

Abstrakt

Die Randelementmethode basiert auf der Zerlegung der Oberfläche eines schwingenden Körpers in viele kleine Oberflächenelemente, wobei jedes Element als Monopol- bzw. Dipolquelle betrachtet werden kann. Daraus resultieren sehr große Gleichungssysteme, die sich häufig nicht mehr mit matrixbasierenden Lösern berechnen lassen.

Die Multi-Level Fast-Multipol-Methode (MLFMM) ist ein potentialbasiertes Clustering-Verfahren zur approximativen Berechnung der für iterative Löser benötigten Matrix-Vektor-Produkte, welches die Anzahl der zu berechnenden Interaktionen zwischen Quell- und Zielpunkten drastisch reduziert, wobei Lösungszeit und Speicherbedarf im Vergleich zu konventionellen Lösungsmethoden deutlich niedriger liegen.

Im Rahmen des Forschungsprojekts MULTIPOL wurde eine Variante der MLFMM entwickelt und optimiert, mit deren Hilfe sich Innenraum- und Abstrahlprobleme mit unterschiedlichen Randbedingungen lösen lassen.

Der Beitrag soll die Grundlagen der Methode und einige Ergebnisse aus verschiedenen Einsatzgebieten darstellen.

Randelementmethode

Die Randelementmethode (boundary element method, BEM) hat sich als gängiges Verfahren zur Lösung akustischer Problemstellungen etabliert, da für die numerische Berechnung mittels entsprechender Integralgleichungen nur die Oberfläche der schwingenden Struktur (Abb. 1) diskretisiert werden muss, das Volumen des Außen- oder Innenraums geht in die Berechnung nicht ein.

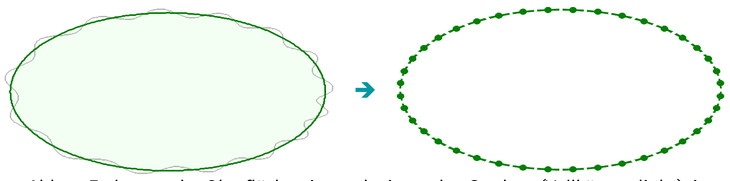

Abb. 1: Zerlegung der Oberfläche einer schwingenden Struktur (Vollkörper, links) in einzelne Elemente (Diskretisierung, rechts, konstante Elemente)

Dies ist ein großer Vorteil der BEM und spiegelt sich in deutlich kleineren Gleichungssystemen wieder, als sie z. B. in der Finiten-Element-Methode (FEM) auftreten.

Die Anzahl der benötigten Elemente ist frequenzabhängig (Faustformel: mindestens 6 Elemente pro Wellenlänge). Da jedes Element als Quelle zu betrachten ist und somit auch mit jedem Ziel-Element interagiert (Abb. 2), ergeben sich bei der BEM voll besetzte komplexe Gleichungssysteme.

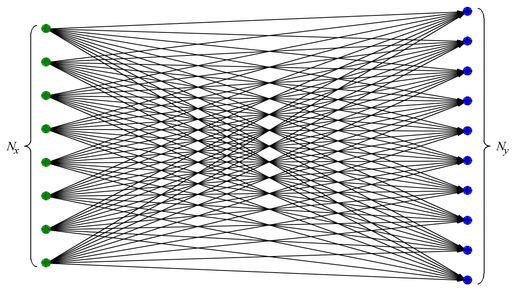

Abb. 2: konventionelle Berechnung der Interaktionen

Sie können daher für mittlere bis hohe Frequenzen effizient nur mit speziellen Verfahren gelöst werden, da der Speicherbedarf für die Systemmatrix den verfügbaren Speicher gängiger Workstations schnell übersteigt.

Fast-Multipol-Methode

Die Fast-Multipol-Methode stellt ein Verfahren zur beschleunigten Bildung eines Matrix-Vektor-Produktes (MVP) dar, ohne dabei jemals die Matrix vollständig bilden zu müssen. Sie eignet sich daher in Verbindung mit iterativen Lösern (hier: GMRES) zum Einsatz bei großen Gleichungssystemen.

Die Wirkungen einzelner Quellen x_i werden innerhalb eines „Quell“-Clusters C_x mit dem Radius R zu einer Multipol-Quelle am Punkt z_x zusammengefasst. Deren Potential wird zu einem entfernten „Ziel“-Cluster C_y mit dem Mittelpunkt z_y transformiert und dort auf die Zielpunkte y_j verteilt (Abb. 3).

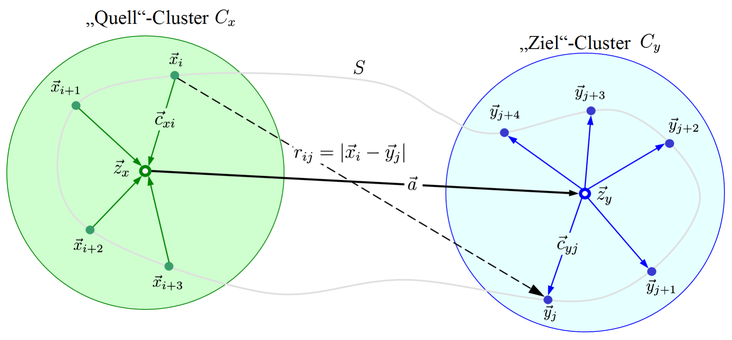

Abb. 3: Zerlegung des Weges zwischen Quell- und Zielpunkt zweier Cluster (Grundlage: [4], S. 347, Abb. 12.9)

Dabei wird zwischen der Single-Level (SLFMM, Abb. 4) und der Multi-Level Fast-Multipol-Methode (MLFMM), welche unterschiedliche Clustergrößen innerhalb einer adaptiven Baumstruktur verwendet (Abb. 5), unterschieden.

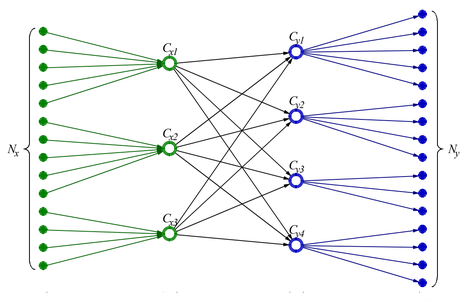

Abb. 4: Cluster-basierende Interaktionen bei der SLFMM

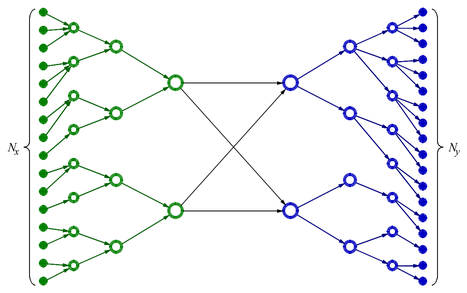

Abb. 5: Cluster-basierende Interaktionen bei der MLFMM

Aus Abb. 4 und Abb. 5 lässt sich die Abnahme der Anzahl der so zu berücksichtigenden Interaktionen klar erkennen, während Abb. 6 die Cluster-Bildung in 2D für eine maximale Anzahl von 3 Quellen pro Box aufzeigt.

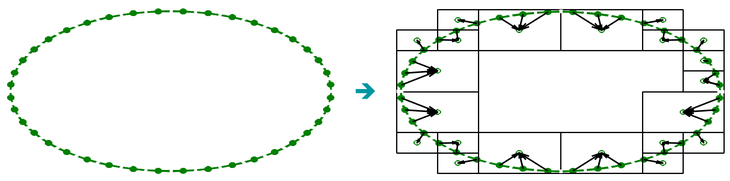

Abb. 6: Cluster-Bildung (mit max. 3 Quellen pro Cluster)

Im dreidimensionalen Fall werden die Cluster durch würfelförmige Boxen repräsentiert, deren Interaktionen durch sog. Nachbarschaftslisten definiert werden (Abb. 7).

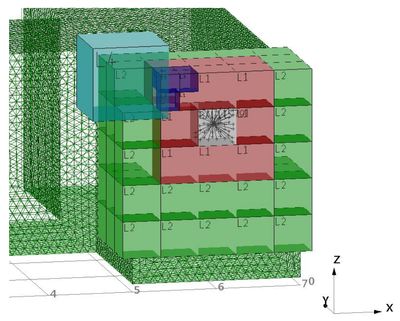

Abb. 7: Beispiel der Interaktionslisten eines MLFMM-Clusters (Box)

Beispiel I: Schallharte Kugel, 2 m Durchmesser, 100.750 Elemente

a) $f = 273$ Hz ($ka = 5$)

konventionell:	N_{iter}:	14	($e_{iter} < 10^{-8}$)
	t_{solve}:	4.472	s [01:14:32]
MLFMM:	N_{iter}:	14	($e_{iter} < 10^{-8}$)
	t_{solve}:	24,5	s
	O_{mp}:	4 … 17	

Abb. 8: schallharte Kugel, f = 100 Hz, Gesamtdruck [Pa] in 5 m Distanz

b) $f = 1.000$ Hz ($ka \approx 18{,}3$)

konventionell:	N_{iter}:	54	($e_{iter} < 10^{-8}$)
	t_{solve}:	19.582	s [05:26:22]
MLFMM:	N_{iter}:	51	($e_{iter} < 10^{-8}$)
	t_{solve}:	582	s
	O_{mp}:	4 … 49	

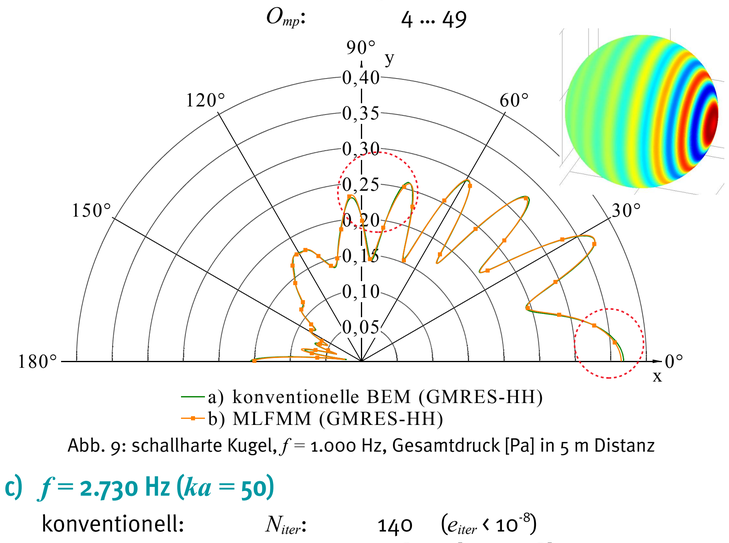

Abb. 9: schallharte Kugel, f = 1.000 Hz, Gesamtdruck [Pa] in 5 m Distanz

c) $f = 2.730$ Hz ($ka = 50$)

konventionell:	N_{iter}:	140	($e_{iter} < 10^{-8}$)
	t_{solve}:	45.718	s [12:41:58]
MLFMM:	N_{iter}:	201	($e_{iter} \approx 10^{-2}$) Fehlerlimit nicht erreicht!
	t_{solve}:	2.685	s [00:44:45]
	O_{mp}:	6 … 116	

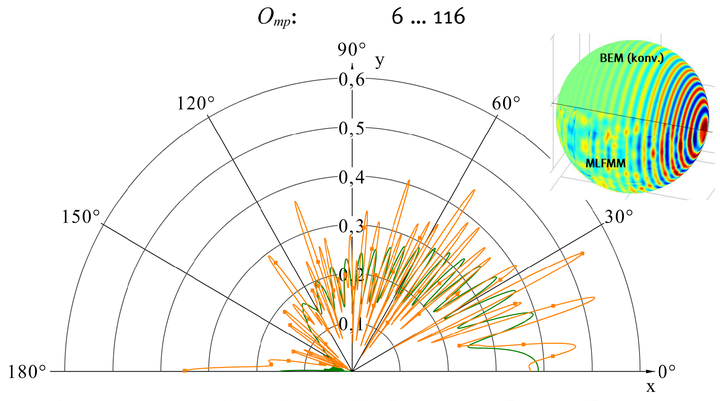

Abb. 10: schallharte Kugel, f = 2.730 Hz, Gesamtdruck [Pa] in 5 m Distanz

Ab einer Frequenz von ca. 1 kHz treten erste sichtbare Differenzen im Druckverlauf (Abb. 9) auf, die mit steigender Frequenz deutlich zunehmen (Abb. 10), da der iterative Löser aufgrund der bei der MVP-Bildung verstärkt auftretenden Fehler nicht mehr gut konvergiert.

Beispiel II: T-Raum mit schallharten Wänden und Türbereich

Dieses zeigt die Ergebnisse der FEM und BEM für einen T-förmigen Innenraum von ca. 7 × 3 × 2,5 m Größe mit schallharten Wänden und einem Türbereich mit der Impedanz ρc.

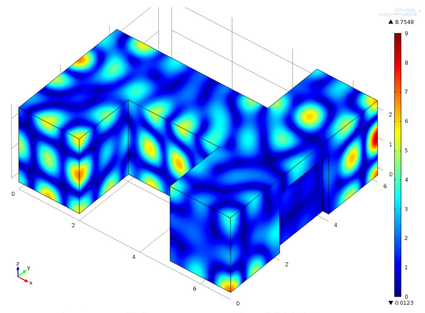

Abb. 11: T-Raum, 250 Hz, FEM-Lösung

a) FEM-Lösung (COMSOL)
N_{elem}: 1.093.480
N_{iter}: 14
t_{solve}: 772 s [01:14:32]
Löser: MUMPS (sparse iterative solver)

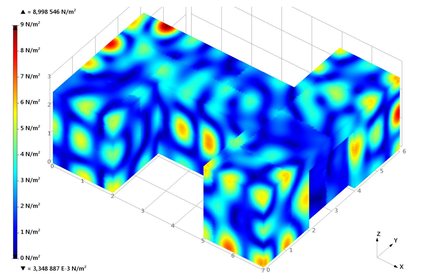

Abb. 12: T-Raum, 250 Hz, MLFMM, $O_{mp} = 6$

b) BEM mit MLFMM
N_{elem}: 30.358
O_{mp}: 6 (fest)
N_{iter}: 183
e_{iter}: $< 10^{-5}$
t_{solve}: 116 s

Deutliche Abweichungen des Schalldruckverlaufs an den Clustergrenzen!

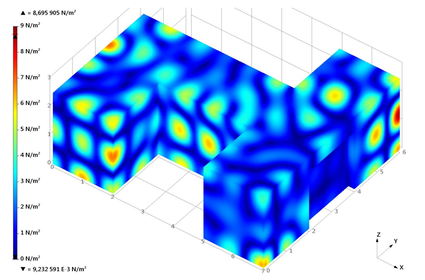

Abb. 13: T-Raum, 250 Hz, MLFMM, $O_{mp} = 10$

c) BEM mit MLFMM
N_{elem}: 30.358
O_{mp}: 10 (fest)
N_{iter}: 191
e_{iter}: $< 10^{-5}$
t_{solve}: 291 s

d) BEM (konventionell)
$t_{solve,GMRES}$: 204 s
$t_{solve,\ IMKL}$: 710 s

Auch hier ist ist deutlich zu erkennen, wie stark die Qualität der Lösung von der Entwicklungsordnung O_{mp} abhängt.

Beispiel III: Innenraum eines Autos

Dieses Beispiel eines Modells eines Auto-Innenraums (mit Schallquelle im Fußraum), das uns freundlicherweise von Herrn M. Aretz von der RWTH Aachen zur Verfügung gestellt wurde, zeigt die Performance-Vorteile der MLFMM.

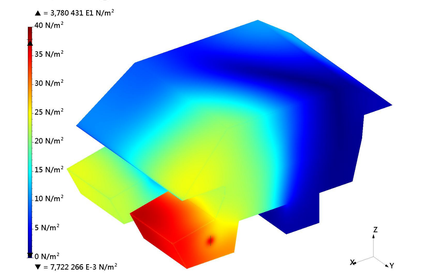

Abb. 14: Auto-Innenraum, 100 Hz, BEM

a) BEM (iterativ, GMRES)
f: 100 Hz
N_{elem}: 394.626
N_{iter}: 32
e_{iter}: $< 5 \times 10^{-7}$
t_{solve}: 573.778 s (6 T, 15 h, 22 min!)

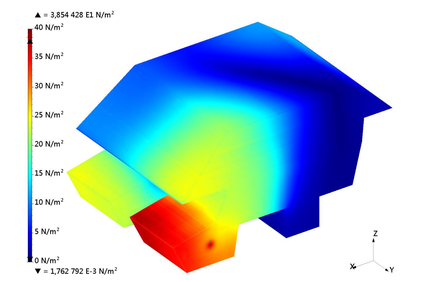

Abb. 15: Auto-Innenraum, 100 Hz, MLFMM

b) BEM mit MLFMM
f: 100 Hz
N_{elem}: 394.626
O_{mp}: 4 … 10
N_{iter}: 32
e_{iter}: $< 5 \times 10^{-7}$
t_{solve}: 67,9 s

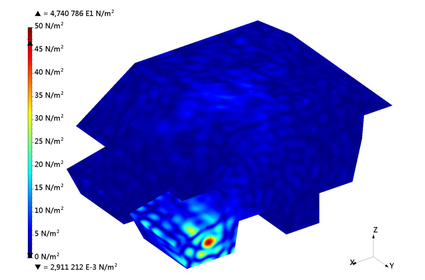

Abb. 16: Auto-Innenraum, 2 kHz, MLFMM

c) BEM mit MLFMM
f: 2.000 Hz
N_{elem}: 394.626
O_{mp}: 5 … 101
N_{iter}: 212
e_{iter}: $< 10^{-6}$
t_{solve}: 6.310 s [01:45:10]

Auch für eine Frequenz von 2 kHz erhält man verwertbare Lösungen, bei entsprechend höherer Lösungszeit.

Fazit

Die dargestellten Ergebnisse zeigen, dass die MLFMM im Vergleich zur konventionellen BEM bei geringeren Rechenzeiten qualitativ vergleichbare Ergebnisse liefert. Dieser Performancevorteil zeigt sich insbesondere bei komplexeren Strukturen und unterschiedlichen Randbedingungen.

Bei höheren Frequenzen weist die MLFMM jedoch deutliche qualitative Abweichungen auf, da sich die methodenbasierenden Fehler in der Matrix-Vektor-Produktbildung stärker auswirken. Hier sind weitere Untersuchungen zur Optimierung des MLFMM-Codes notwendig. Ebenso soll ein geeigneter Vorkonditionierer verwendet werden, um eine bessere Konvergenz des iterativen Verfahrens zu erzielen.

Förderung

Dieses Projekt wird durch das Institut für angewandte Forschung Berlin e.V. (IfaF) gefördert.

IFAF Institut für angewandte Forschung Berlin
BERLIN

Literatur

[1] R. Burgschweiger, I. Schäfer und M. Ochmann:
„Ein Multilevel-Fast-Multipole-Algorithmus (MLFMM) zur Berechnung der Schallstreuung am Beispiel von Objekten unter Wasser“, Proceedings der 36. Jahrestagung für Akustik (DAGA 2010), 2010, Berlin, Art.-Nr. 61

[2] M. Ochmann, R. Burgschweiger und C. Steuck:
„Numerical experiments for testing the convergence of the acoustical Fast Multipole Method“, Proceedings of the 1st EAA Congress on Sound & Vibration (EuroRegio), 2010, Ljubljana

[3] R. Burgschweiger und M. Ochmann:
„Verwendung der BEM-basierten Fast Multipol Methode für Innenraumprobleme“, Proceedings der 37. Jahrestagung für Akustik (DAGA 2011), 2011, Düsseldorf, Art.-Nr. 523

[4] T. Sakuma, S. Schneider und Y. Yasuda:
„Fast Solution Methods“, Kap. 12, in „Computational Acoustics of Noise Propagation in Fluids“, 2008, Springer Verlag, S. 333ff