Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte
Unterschrift

Aufgabe 1 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 5 Punkte, (b) : 5 Punkte)

Eine Ziege grast auf einer Weide. Allerdings ist sie mit einem 10 Meter langen Seil an einer rechteckigen Scheune angebunden.
Die Scheune ist 6 Meter mal 4 Meter groß und die Befestigung der Leine befindet sich in der Mitte einer langen Seite.

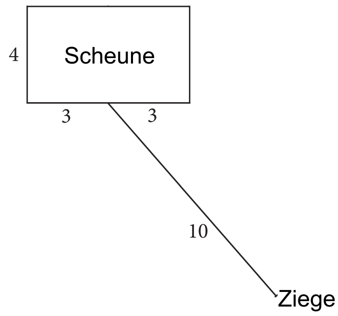

Abbildung 1: *
An der Scheune angeleinte Ziege

a) Berechnet den Flächeninhalt, den die Ziege abgrasen kann.

b) Die Bäuerin bekommt Mitleid mit der Ziege und verlängert die Leine um zwei Meter. Welche Fläche kann die Ziege nun erreichen?

Platz für die Lösung:

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 2 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 3 Punkte, (b) : 2 Punkte, (c) : 5 Punkte)

a.) Findet eine Menge M von zehn natürlichen Zahlen, sodass jede Zahl zwischen 1 und 1000 als Summe der Elemente einer Teilmenge dieser zehn Zahlen geschrieben werden kann. Insbesondere darf keine Zahl aus M häufiger als einmal als Summand vorkommen. Begründet, wieso eure Menge die geforderte Eigenschaft erfüllt.

b.) Beweist, dass alle ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden können.
Zum Beispiel ist

$$1557 = 257 + 258 + 259 + 260 + 261 + 262.$$

c.) Tatsächlich kann sogar jede Zahl zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden, bis auf eine. Findet heraus, welche Zahl dies ist, und beweist, dass diese Zahl in der Tat die einzige Zahl zwischen 1000 und 2000 ist, die nicht als solche Summe geschrieben werden kann!

Platz für die Lösung:

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 3 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) : 2 Punkte, (b) : 5 Punkte, (c) : 3 Punkte)

In der Ebene seien eine Strecke $\overline{AB}$ sowie ein Punkt C im Inneren dieser Strecke gegeben. Über den drei Strecken $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ wird jeweils ein Halbkreis errichtet. Die von diesen Halbkreisen begrenzte Figur heißt *Arbelos* (griechisch $A\rho\beta\upsilon\lambda o\varsigma$ für Schustermesser) oder auch *Sichel des Archimedes* (Abbildung links).

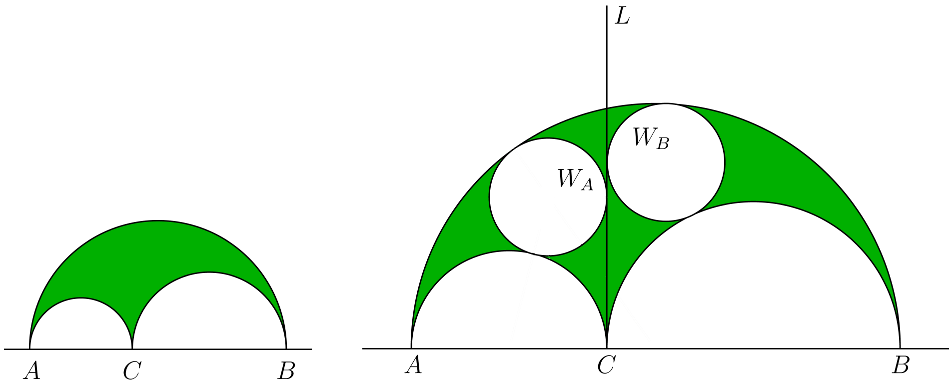

Abbildung 2: *
Arbelos und Zwillingskreise des Archimedes

a) Beweist, dass der Weg von A nach B entlang des großen Halbkreises genauso lang ist wie der Weg von A über C nach B entlang der beiden kleinen Halbkreise.

b) Sei L die auf AB senkrechte Gerade durch den Punkt C. Diese Gerade zerlegt den Arbelos in zwei Teile. Seien W_A und W_B die maximalen in diese Gebiete einschreibbaren Kreise (Abbildung rechts). Zeigt, dass W_A und W_B gleich groß sind. Diese Kreise werden auch die *Zwillingskreise des Archimedes* genannt.

c) Beweist, dass der kleinste Kreis, der die beiden Kreise W_A und W_B in seinem Inneren enthält, den gleichen Flächeninhalt hat wie der Arbelos!

Platz für die Lösung:

Team Nr.

nur für Korrektur:

Punkte

Unterschrift

Aufgabe 4 (max. 10 Punkte)

(Aufgabe (a) - (e): je 2 Punkte)

Sei X eine Menge von 2019 verschiedenen Punkten in der Ebene. Jeder Punkt P habe dabei genau einen Punkt Q, der ihm am nächsten ist. Dieser Punkt Q heiße *Nachbar* von P und wird mit diesem durch eine Strecke verbunden. Die Menge aller eingezeichneten Strecken sei S.

a.) Beweist, dass die Menge S mindestens 1010 Strecken enthält. Beschreibt ein Beispiel für eine Menge X, sodass es genau 1010 Strecken in S gibt.

b.) Beweist, dass es mindestens einen Punkt gibt, der nicht Nachbar irgendeines anderen Punktes ist.

c.) Beweist, dass kein Punkt Endpunkt von mehr als fünf Strecken ist.

d.) Beweist, dass sich keine zwei Strecken in ihrem Inneren schneiden.

e.) Beweist, dass S keinen geschlossenen Streckenzug enthält.

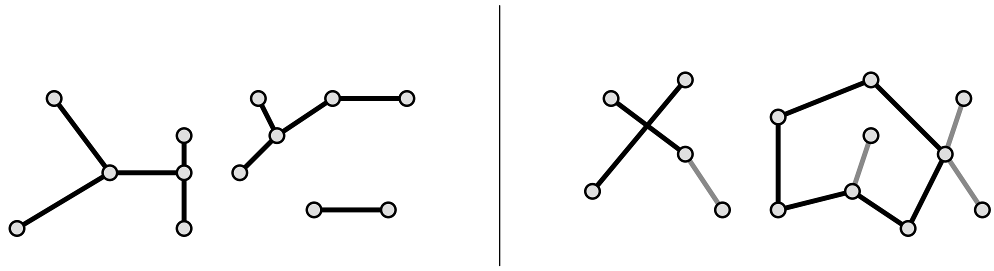

Abbildung 3: *
Beispiele für eine mögliche und eine nicht mögliche Streckenmenge S

Das Beispiel links in der Abbildung zeigt eine Streckenmenge S, die aus der oben beschriebenen Prozedur entstanden ist. Die Streckenmenge rechts dagegen enthält sich schneidende Strecken und einen geschlossenen Streckenzug, sodass sie in keinem Fall auftreten kann.

Platz für die Lösung: