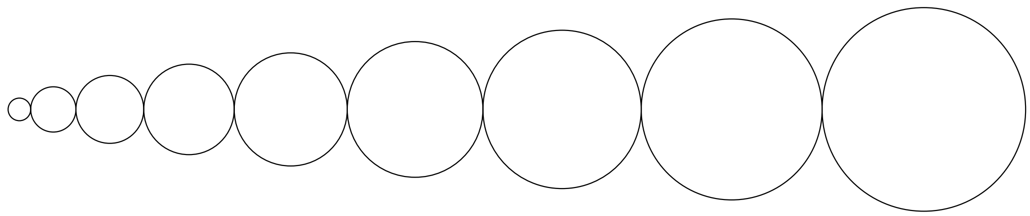
Tag der Mathematik 2019

Wettbewerbsaufgaben Klasse 9/10, Lösungen

Aufgabe 1. Diese Aufgabe hat zwei voneinander unabhgigige Teile.

(a) Die neun Rädchen 1, 2, ..., 9 berühren einander entsprechend der Abbildung.



Ihre Durchmesser sind 1 cm, 2 cm, ..., 9 cm. Um wieviel Grad dreht sich das Rädchen 9, wenn sich das erste Rädchen um 90° dreht?

(b) Ein Computervirus zerstört am ersten Tag die Hälfte des Festplattenspeichers, am zweiten ein Drittel der jetzt noch intakten Festplatte, am dritten ein Viertel der dann noch intakten Festplatte usw. Nach dem wievielten Tag ist nur noch der 2019. Teil der Festplatte unzerstört?

Lösung. (a) Ein Punkt auf dem Rand eines i-ten Rädchens mit Durchmesser d_i wird bei Rotation des Rädchens um den Winkel α_i (gemessen in Grad) um $\frac{\alpha_i}{360}\pi d_i$ bewegt, da der Umfang des i-ten Rädchens πd_i beträgt. Für den gesuchten Winkel α_9 gilt also

$$\frac{90}{360}\pi \cdot 1 = \frac{\alpha_2}{360}\pi \cdot 2 = \ldots = \frac{\alpha_8}{360}\pi \cdot 8 = \frac{\alpha_9}{360}\pi \cdot 9\,,$$

das heißt

$$\alpha_9 = 10^{\text{o}}\,.$$

(b) Der intakte Anteil ist nach einem Tag $\frac{1}{2}$, nach 2 Tagen $\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, nach 3 Tagen $\frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ etc. Nach 2018 Tagen ist also nur noch der 2019. Teil der Festplatte intakt.

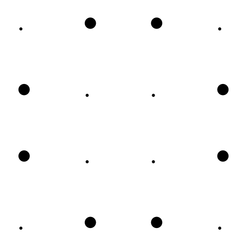
Aufgabe 2 Betrachtet die 16 Punkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten (m, n), $m \in \{1, 2, 3, 4\}$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Begründet, warum man nicht 9 Punkte aus diesen 16 Punkten so auswählen kann, dass keine 3 von ihnen auf einer Geraden liegen.

(b) Findet eine möglichst große Teilmenge dieser 16 Punkte, so dass keine 3 der ausgewählten Punkte auf einer Geraden liegen.

Lösung. (a) Wir haben 4 horizontale Geraden; bei 9 ausgewählten Punkten muss also eine dieser Geraden mindestens 3 ausgewählte Punkte enthalten. (Genauso kann man natürlich mit vertikalen Geraden argumentieren.)

(b) Man kann 8 Punkte wie gefordert auswählen, z.B. so:



Aufgabe 3 Diese Aufgabe hat zwei voneinander unabhängige Teile.

(a) Zeigt, dass die Summe der Quadrate von 7 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen niemals eine Quadratzahl ist.

(b) Zeigt, dass es unter 10 aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen immer eine gibt, die zu den 9 anderen teilerfremd ist.

Lösung. (a) Die 7 aufeinanderfolgenden Zahlen seien $n, n+1, \ldots, n+6$. Die Summe ihrer Quadrate ist

$$S = n^2 + (n+1)^2 + \cdots + (n+6)^2.$$

Beachte $(n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2$; also ist

$$\begin{aligned} S &= 7n^2 + 2n \cdot (1 + \cdots + 6) + (1^2 + \cdots + 6^2) \\ &= 7n^2 + 42n + 91 = 7 \cdot (n^2 + 6n + 13). \end{aligned}$$

Daher ist S durch 7 teilbar, und wäre S eine Quadratzahl, wäre auch $n^2+6n+13$ durch 7 teilbar. Das passiert aber dann und nur dann, wenn die etwas einfachere Zahl $n^2+6n+13-7n-14 = n^2-n-1$ durch 7 teilbar ist. Hat aber n bei Division durch 7 den Rest r, so ist $n^2 - n - 1$ durch 7 teilbar, wenn $r^2 - r - 1$ durch 7 teilbar ist und umgekehrt. [Schreibt man nämlich $n = 7m + r$, so ist $n^2 - n - 1 = (49m^2 + 14mr - 7m) + r^2 - r - 1$, und der Term in der Klammer ist durch 7 teilbar.] Daher muss nur für $r = 0, \ldots, 6$ überprüft werden, ob $r^2 - r - 1$ durch 7 teilbar ist:

r	0	1	2	3	4	5	6
$r^2 - r - 1$	-1	-1	1	5	11	19	29

Variante. Das Argument wird ein bisschen einfacher, wenn man nicht die erste, sondern die mittlere Zahl n nennt. Dann geht es um

$$n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$$

mit der Quadratsumme

$$S' = (n-3)^2 + \cdots + n^2 + \cdots + (n+3)^2.$$

Beachte jetzt $(n-k)^2 + (n+k)^2 = 2n^2 + 2k^2$, so dass

$$\begin{aligned} S' &= 2(n^2 + 3^2) + 2(n^2 + 2^2) + 2(n^2 + 1^2) + n^2 \\ &= 7n^2 + 2 \cdot 14 = 7(n^2 + 4). \end{aligned}$$

Wie bei der ersten Lösung müssen wir ausschließen, dass $n^2 + 4$ durch 7 teilbar ist, und das geht wieder durch vollständige Fallunterscheidung mit Hilfe der 7er Reste:

r	0	1	2	3	4	5	6
$r^2 + 4$	4	5	8	13	20	29	40

(b) Wenn unter den 10 aufeinanderfolgenden Zahlen eine ist, die weder durch 2, 3, 5 noch durch 7 teilbar ist, muss sie zu den übrigen teilerfremd sein, da keine zwei der 10 Zahlen einen gemeinsamen Primteiler ≥ 11 haben können. Wir werden überlegen, dass es immer solch eine Zahl gibt.

Unter den 10 Zahlen sind fünf, die durch 2 teilbar sind. Ferner sind unter den 10 Zahlen höchstens vier, die durch 3 teilbar sind, und von diesen sind höchstens zwei ungerade. Also haben höchstens

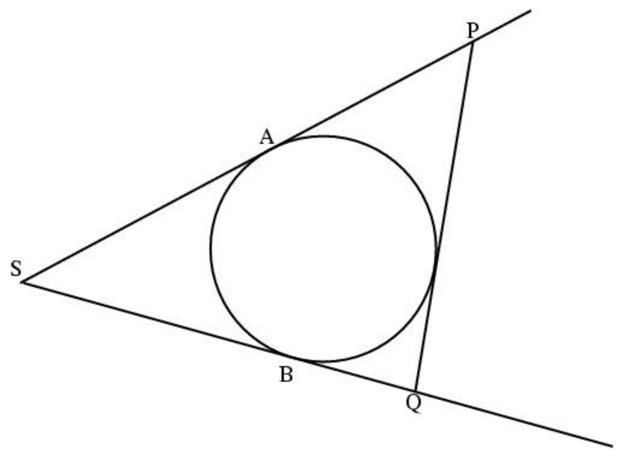
7 Zahlen die Primteiler 2 oder 3. Unter den 10 Zahlen sind zwei, die durch 5 teilbar sind, davon ist eine gerade und eine ungerade. Die gerade von den beiden ist schon in unserer 7er Liste, die ungerade eventuell noch nicht. Also haben höchstens 8 Zahlen die Primteiler 2, 3 oder 5. Unter den 10 Zahlen sind höchstens zwei, die durch 7 teilbar sind, davon ist höchstens eine ungerade (die noch nicht in unserer Liste ist). Also haben höchstens 9 Zahlen die Primteiler 2, 3, 5 oder 7. Das war zu begründen.

Übrigens ist $110, \ldots, 119$ eine Folge von 10 aufeinanderfolgenden Zahlen, von denen eine einzige zu den übrigen teilerfremd ist, und es ist die erste mit dieser Eigenschaft.

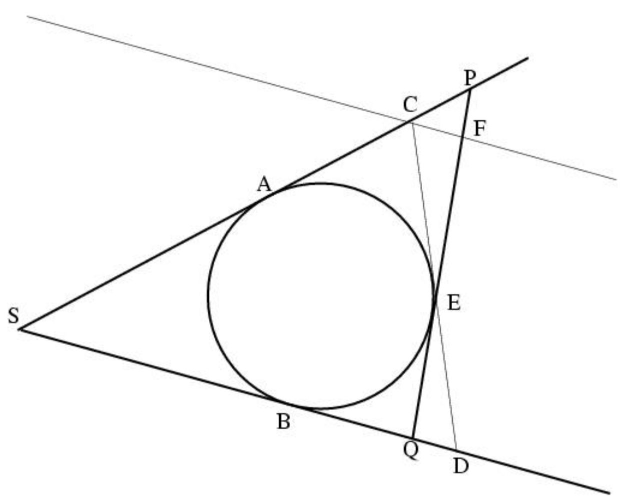
Aufgabe 4.

(a) Es sei ein Kreis mit zwei Tangenten gegeben, die sich im Punkt S schneiden. Die Berührungspunkte der Tangenten an den Kreis heißen A und B. Wir betrachten eine weitere Tangente an den Kreis, die die Strahlen SA bzw. SB in den Punkten P bzw. Q schneide. Dabei sollen die Punkte P und Q nicht auf den Strecken $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ liegen. Zeigt, dass der Flächeninhalt des Dreiecks PSQ minimal ist, wenn die Streckenlängen von $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ übereinstimmen.

(b) Beweist, dass die Streckenlänge von $\overline{PQ}$ minimal ist, falls die Streckenlängen von $\overline{SP}$ und $\overline{SQ}$ gleich sind.

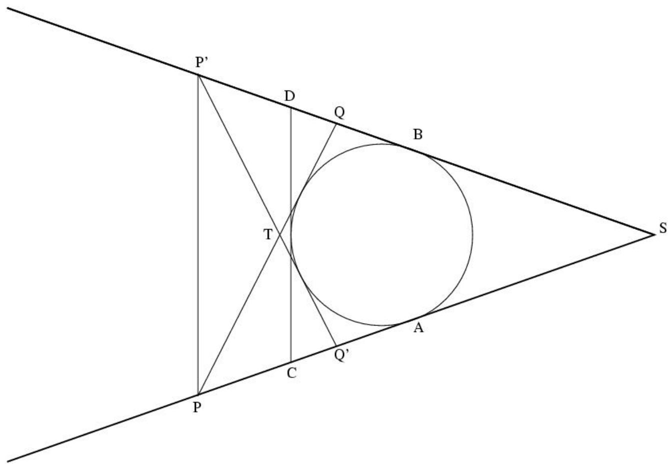


Lösung. (a) Nehmen wir an, dass die Strecke $\overline{SQ}$ kürzer als die Strecke $\overline{SP}$ ist (sonst müssen in dem folgenden Argument die Rollen von P und Q vertauscht werden); siehe Skizze. Es sei CD diejenige Tangente an den Kreis mit $\overline{SC} = \overline{SD}$ und E der Schnittpunkt der Tangenten PQ und CD. Es genügt nun zu zeigen, dass der Flächeninhalt des Dreiecks QDE kleiner ist als der von PCE. Betrachten wir aber zusätzlich die Parallele von BS durch C, so sind die Dreiecke FCE und QDE ähnlich. Nun ist die Strecke ED kürzer als die Strecke EC, und daraus folgt die Ungleichung der Flächeninhalte $F(QDE) < F(FCE) < F(PCE)$.



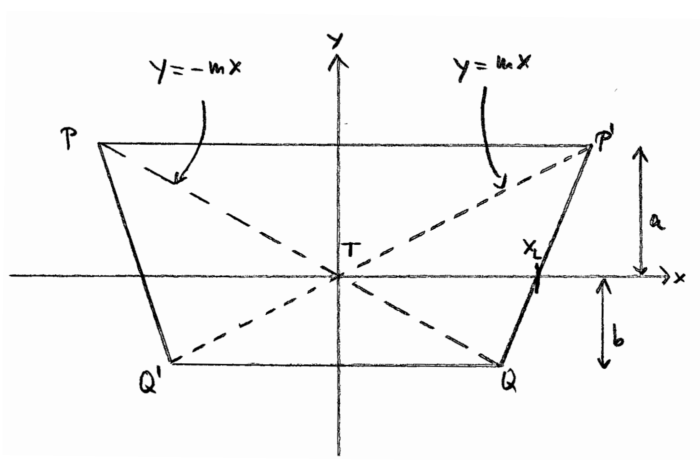
Daher hat das Dreieck SDC minimalen Flächeninhalt.

(b) Eintragen der gespiegelten Tangente $\overline{P'Q'}$ wie im Bild liefert ein gleichschenkliges Trapez $PQ'QP'$, in dem die Tangente $\overline{PQ}$ eine Diagonale ist. Deshalb ist $\overline{PQ} > \overline{CD}$; detaillierte Begründung folgt.



Tatsächlich stimmt diese Ungleichung sogar, wenn man statt $\overline{CD}$ die dazu parallele Strecke im Trapez durch den Schnittpunkt T der Diagonalen betrachtet, die größer als $\overline{CD}$ ist. Das werden wir jetzt mit etwas analytischer Geometrie nachrechnen.

Dazu drehen wir die Anordnung so, dass T im Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems liegt und die parallelen Seiten des Trapezes zur x-Achse parallel sind:



Zuerst beobachten wir, dass $a > b$ ist, denn die Dreiecke $TP'P$ und $TQ'Q$ sind ähnlich mit $\overline{PP'} > \overline{QQ'}$.

Es hat P die Koordinaten $(x_P, -mx_P)$ mit $-mx_P = a$, also

$$P = \left(-\frac{a}{m}, a\right) \qquad \text{und} \qquad P' = \left(\frac{a}{m}, a\right).$$

Genauso hat Q die Koordinaten (x_Q, mx_Q) mit $mx_Q = -b$, also

$$Q = \left(\frac{b}{m}, -b\right) \qquad \text{und} \qquad Q' = \left(-\frac{b}{m}, -b\right).$$

Uns interessiert die x-Koordinate des Punktes $(x_L, 0)$ in der rechten Halbebene (x_L ist die Hälfte der Länge der zu $\overline{CD}$ parallelen Strecke durch T). Da $(x_L, 0)$ auf der Strecke $\overline{QP'}$ liegt, gibt es ein $\lambda > 0$ mit

$$(x_L, 0) = Q + \lambda(P' - Q) = \Big(\frac{b}{m}, -b\Big) + \lambda\Big(\frac{a-b}{m}, a - (-b)\Big) = \Big(\frac{b}{m} + \lambda\frac{a-b}{m}, -b + \lambda(a+b)\Big).$$

Da die 2. Koordinate $= 0$ ist, folgt $\lambda = \frac{b}{a+b}$, also

$$x_L = \frac{b}{m} + \frac{b}{a+b}\,\frac{a-b}{m} = \frac{(a+b)b + b(a-b)}{(a+b)m} = \frac{2ab}{(a+b)m}.$$

Andererseits ist nach dem Satz von Pythagoras

$$\overline{PQ}^2 = \Big(\frac{-a}{m} - \frac{b}{m}\Big)^2 + (a - (-b))^2 = \frac{(a+b)^2(m^2+1)}{m^2}.$$

Die behauptete Ungleichung ist also $(2x_L)^2 < \overline{PQ}^2$, d.h.

$$\Big(\frac{4ab}{(a+b)m}\Big)^2 < \frac{(a+b)^2(m^2+1)}{m^2} \qquad \text{für } a > b > 0.$$

Umstellen liefert die äquivalente Ungleichung

$$(4ab)^2 < (a+b)^4(m^2+1) \qquad \text{für } a > b > 0.$$

Nun ist für $a \neq b$

$$4ab < (a+b)^2,$$

denn $(a+b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 > 0$; also gilt in der Tat für $a > b > 0$

$$(4ab)^2 < (a+b)^4 \leq (a+b)^4 + m^2(a+b)^4 = (a+b)^4(m^2+1),$$

was zu zeigen war.

Variante. Alternativ kann man von den Koordinatendarstellungen

$$P = (-x_2, a), \quad P' = (x_2, a), \quad Q = (x_1, -b), \quad Q' = (-x_1, -b)$$

ausgehen. Es ist dann

$$\frac{x_L - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{b}{a+b}, \qquad \frac{x_2}{a} = \frac{x_1}{b}.$$

Die zu zeigende Ungleichung ist (Pythagoras)

$$(x_2 + x_1)^2 + (a+b)^2 > (2x_L)^2. \tag{$*$}$$

Die erste Gleichung der vorletzten Zeile liefert

$$x_L = \frac{a}{a+b}x_1 + \frac{b}{a+b}x_2;$$

setzt man dieses x_L und $x_2 = \frac{a}{b}x_1$ in $(*)$ ein, so entsteht die zu $(*)$ äquivalente Ungleichung

$$x_1^2 + b^2 > 16\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^2\Big(\frac{b}{a+b}\Big)^2 x_1^2. \tag{$**$}$$

Da $x_1^2 + b^2 > x_1^2$, müssen wir zum Beweis von $(**)$ die Ungleichung

$$16\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^2\Big(\frac{b}{a+b}\Big)^2 \leq 1,$$

begründen, also mit der Abkürzung $r = \frac{a}{a+b}$ (so dass $1 - r = \frac{b}{a+b}$)

$$4r(1-r) \leq 1.$$

Das sieht man durch quadratische Ergänzung so:

$$4r(1-r) = -4r^2 + 4r = -4r^2 + 4r - 1 + 1 = -(2r-1)^2 + 1 \leq 1.$$