24. Berliner Tag der Mathematik

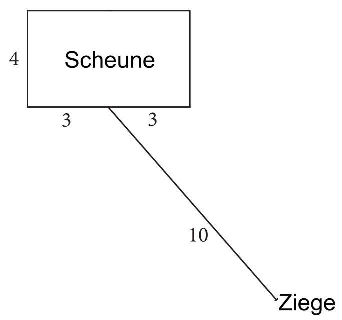
Musterlösungen zu den Wettbewerbsaufgaben der Klassenstufe 11–13

11. Mai 2019

Aufgabe 1

5+5 Punkte

Eine Ziege grast auf einer Weide. Allerdings ist sie mit einem 10 Meter langen Seil an einer rechteckigen Scheune angebunden. Die Scheune ist 6 Meter mal 4 Meter groß und die Befestigung der Leine befindet sich in der Mitte einer langen Seite.



An der Scheune angeleinte Ziege

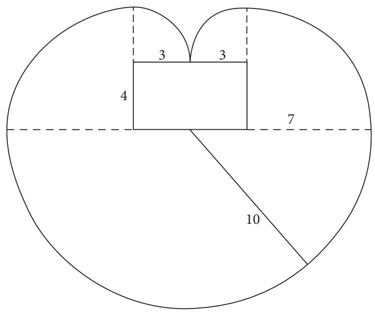
a) Berechnet den Flächeninhalt, den die Ziege abgrasen kann.

b) Die Bäuerin bekommt Mitleid mit der Ziege und verlängert die Leine um zwei Meter. Welche Fläche kann die Ziege nun erreichen?

Lösung

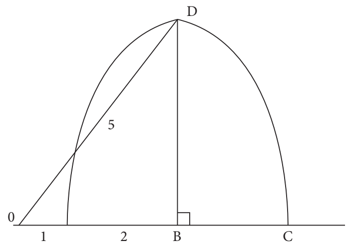
a) Der Abbildung können wir entnehmen, dass die Ziege eine Fläche erreicht, die aus sechs Viertelkreisen besteht. Ihr Flächeninhalt ist gleich der Summe der Flächeninhalte der drei Halbkreise der Radien $10, 10 - 3 = 7$ und $7 - 4 = 3$ Metern. Die Ziege kann also eine Fläche von $(10^2 + 7^2 + 3^2)\pi/2 = 79\pi$ Quadratmetern abgrasen.

b) Mit der längeren Leine überlappen die beiden kleinen Viertelkreise hinter der Scheune, da ihr gemeinsamer Radius nun $12 - 3 - 4 = 5$ Meter beträgt. Wenn wir für einen kurzen Moment diese Überlappung ignorieren, dann ist die Summe der Flächeninhalte der drei Halbkreise $(12^2 + 9^2 + 5^2)\pi/2 = 125\pi$. Von diesem Flächeninhalt müssen wir aber noch die



Von der Ziege abgrasbare Fläche

Fläche A des sich überlappenden Gebietes abziehen, welches die Form einer Bischofsmütze hat.



Überlappendes Gebiet in Form einer Bischofsmütze

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|\overline{BD}|^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, sodass $|\overline{BD}| = 4$. Wir können die beiden Hälften der Mitra anstelle an der vertikalen Symmetrieachse an der horizontalen Achse aneinanderkleben, sodass ein Segment eines Kreises mit dem Radius 5 und der Sehnenlänge $2|\overline{BD}| = 8$ entsteht. Der Kreiswinkel α des Segmentes vom Mittelpunkt des Kreises aus gemessen ist dann $2\arctan(4/3)$. Der Flächeninhalt des Segmentes ist dann der Flächeninhalt des entsprechenden Kreissektors minus dem Flächeninhalt der dreieckigen Fläche außerhalb des Sektors. Wir erhalten

$$A = \frac{2\arctan(4/3)}{2\pi}(5^2\pi) - \frac{8 \cdot 3}{2} = 25\arctan(4/3) - 12.$$

Die Ziege kann also eine Fläche von $125\pi - 25\arctan(4/3) + 12$ Quadratmetern abgrasen. $\square$

Aufgabe 2

3+2+5 Punkte

a) Findet eine Menge M von zehn natürlichen Zahlen, sodass jede Zahl zwischen 1 und 1000 als Summe der Elemente einer Teilmenge dieser zehn Zahlen geschrieben werden kann. Insbesondere darf keine Zahl aus M häufiger als einmal als Summand vorkommen. Begründet, wieso eure Menge die geforderte Eigenschaft erfüllt.

b) Beweist, dass alle ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden können. Zum Beispiel ist

$$1557 = 257 + 258 + 259 + 260 + 261 + 262.$$

c) Tatsächlich kann sogar jede Zahl zwischen 1000 und 2000 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden, bis auf eine. Findet heraus, welche Zahl dies ist, und beweist, dass diese Zahl in der Tat die einzige Zahl zwischen 1000 und 2000 ist, die nicht als solche Summe geschrieben werden kann!

Lösung

a) Wenn wir die Binärdarstellung einer Zahl verwenden, so wird offensichtlich, dass sich jede Zahl zwischen 1 und 1023 als Summe einer Teilmenge von Zahlen der Menge

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512\}$$

schreiben lässt.

b) Jede ungerade Zahl ist von der Form $2k+1$ und lässt sich daher als $k+(k+1)$ schreiben.

c) Wenn man mit kleinen Zahlen etwas experimentiert, findet man schnell heraus, dass die einzigen Zahlen, die nicht als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Dezimalzahlen geschrieben werden können (kurz: *als SAND*), Zweierpotenzen sind. Die einzige Zweierpotenz zwischen 1000 und 2000 ist 1024, folglich behaupten wir, dass 1024 die einzige Zahl zwischen 1000 und 2000 ist, die kein SAND ist.
Wenn die natürliche Zahl n keine Zweierpotenz ist, hat n einen ungeraden Teiler $(2s+1)$. Wir können also $n = r(2s+1)$ mit $r, s \geq 1$ schreiben. Dann gilt

$$(\star) \quad (r-s) + (r-s+1) + \ldots + r + \ldots + (r+s-1) + (r+s) = r(2s+1) = n,$$

da $-s$ im ersten Summanden das $+s$ im letzten Summanden aufhebt, $-s+1$ im zweiten und $s-1$ im vorletzten Summanden addieren sich zu Null, und so weiter. Allerdings besteht die Summe $(\star)$ nicht aus positiven ganzen Zahlen, wenn $r-s \leq 0$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $r-s$ als $-k$ und erkennen, dass $(\star)$ wie folgt beginnt:

$$-k + (-k+1) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + \ldots + (k-1) + k = 0.$$

Wir können also einfach die ersten $2k+1$ Terme der Summe $(\star)$ streichen um n als SAND zu schreiben. In der Tat bleiben $2(s+1) - (2k+1) = 2(s-k) = 2r \geq 2$ positive ganze Zahlen in der Summe $(\star)$ über.
Beispiel: $n = 44 = 4 \cdot 11$, also $r = 4$ und $s = 5$. Dann ist $r - s = -1$ und $r + s = 9$. Mit Hilfe von $(\star)$ erhalten wir

$$(-1 + 0 + 1) + 2 + \ldots + 9 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 44.$$

Zweierpotenzen lassen sich allerdings nicht als SAND schreiben. Dazu schreiben wir eine Zahl n, die SAND ist, wie folgt mit ganzen Zahlen $k, m \geq 1$:

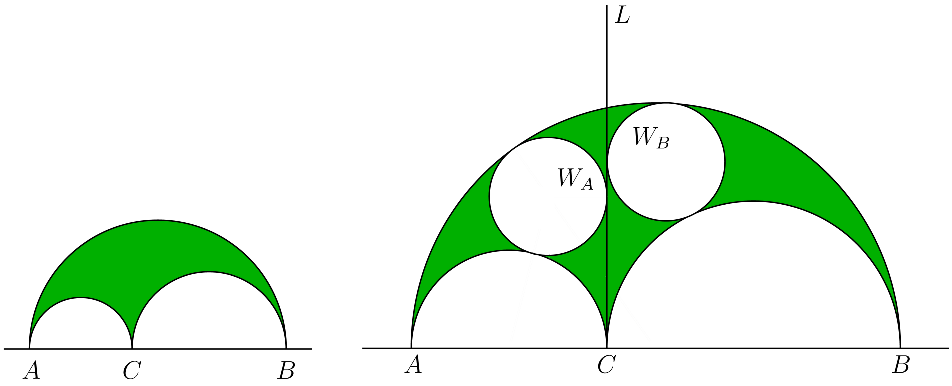
$$n = k + (k+1) + \ldots + (k+m) = (m+1)k + \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{2}(m+1)(2k+m).$$

Ist m gerade, so ist auch $2k+m$ gerade und $m+1 \geq 3$ ein ungerader Teiler von n. Ist m ungerade, so ist $m+1$ gerade und $2k+m \geq 3$ ist ein ungerader Teiler von n. In jedem Fall hat n einen ungeraden Teiler und kann keine Zweierpotenz sein, wenn es SAND ist.
□

Aufgabe 3

2+5+3 Punkte

In der Ebene seien eine Strecke $\overline{AB}$ sowie ein Punkt C im Inneren dieser Strecke gegeben. Über den drei Strecken $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ und $\overline{AB}$ wird jeweils ein Halbkreis errichtet. Die von diesen Halbkreisen begrenzte Figur heißt *Arbelos* (griechisch $A\rho\beta\upsilon\lambda o\varsigma$ für Schustermesser) oder auch *Sichel des Archimedes* (Abbildung links).



Arbelos und Zwillingskreise des Archimedes

a) Beweist, dass der Weg von A nach B entlang des großen Halbkreises genauso lang ist wie der Weg von A über C nach B entlang der beiden kleinen Halbkreise.

b) Sei L die auf AB senkrechte Gerade durch den Punkt C. Diese Gerade zerlegt den Arbelos in zwei Teile. Seien W_A und W_B die maximalen in diese Gebiete einschreibbaren Kreise (Abbildung rechts). Zeigt, dass W_A und W_B gleich groß sind. Diese Kreise werden auch die *Zwillingskreise des Archimedes* genannt.

c) Beweist, dass der kleinste Kreis, der die beiden Kreise W_A und W_B in seinem Inneren enthält, den gleichen Flächeninhalt hat wie der Arbelos!

Lösung

a) Der Umfang eines Halbkreises mit Durchmesser d ist $\pi d/2$. Folglich ist die Länge des Weges entlang des großen Halbkreises gleich

$$\frac{\pi}{2}|\overline{AB}| = \frac{\pi}{2}(|\overline{AC}| + |\overline{CB}|),$$

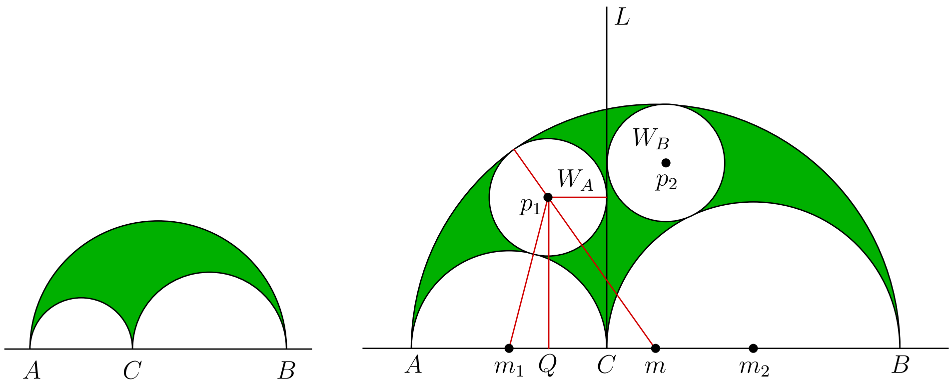
welches der Länge des Weges entlang der beiden kleinen Halbkreise entspricht.

b) Die Mittelpunkte der Kreise des Arbelos seien m_1, m_2 und m. Die Mittelpunkte von W_A und W_B seien p_1 und p_2. Die Radien der Kreise des Arbelos bezeichnen wir mit r_1, r_2 und r, sodass $r_1 + r_2 = r$. Die Radien von W_A und W_B seien ρ_1 und ρ_2. Wir behaupten

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

In unserer Rechnung nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $r_1 \leq r_2$ gilt. Da W_A den großen und den linken Halbkreis berührt, haben wir

$$|\overline{m_1 p_1}| = r_1 + \rho_1 \text{ und } |\overline{m p_1}| = r - \rho_1 = r_1 + r_2 - \rho_1.$$



Notation für Teil b)

Sei nun Q der Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$, der auf der Parallelen zu L durch p_1 liegt. Da W_A die Gerade L berührt, gilt:

$$|\overline{m_1Q}| = r_1 - \rho_1,$$
$$|\overline{mQ}| = |\overline{mC}| + |\overline{CQ}| = |\overline{mA}| - |\overline{AC}| + \rho_1 = r_2 + r_1 - 2r_1 + \rho_1 = r_2 - r_1 + \rho_1.$$

Der Satz von Pythagoras angewandt auf die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle m_1Qp_1$ und $\triangle p_1Qm$ liefert nun

$$|\overline{Qp_1}|^2 = (r_1 + \rho_1)^2 - (r_1 - \rho_1)^2 = (r_1 + r_2 - \rho_1)^2 - (r_2 - r_1 + \rho_1)^2.$$

Daraus folgt $4r_1\rho_1 = 4r_2(r_1 - \rho_1)$ und somit

$$\rho_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

ρ_2 berechnet sich ganz analog.

c) Da die zu zeigende Aussage skalierungsinvariant ist, können wir ohne Einschränkung $r_1 + r_2 = 1$ annehmen. Aus Teil b) wissen wir dann $\rho := \rho_1 = \rho_2 = r_1 r_2$.
Der Mittelpunkt des kleinsten Kreises, der W_A und W_B enthält, liegt auf der Strecke $\overline{p_1p_2}$. Sein Durchmesser ist

$$d := \rho_1 + |\overline{p_1p_2}| + \rho_2 = 2\rho + |\overline{p_1p_2}|.$$

Der Abstand zwischen p_1 und p_2 entlang der Geraden AB ist $\rho_1 + \rho_2 = 2\rho$, da die beiden Kreise L berühren. Entlang der Geraden L beträgt der Abstand

$$|\overline{Q'p_2}| - |\overline{Qp_1}| = 2\sqrt{r_2\rho} - 2\sqrt{r_1\rho}.$$

Hierbei ist Q' der Punkt auf $\overline{AB}$, der auf der Parallelen zu L durch p_2 liegt, und $|\overline{Q'p_2}|^2 = 4r_2\rho$ berechnet sich genauso wie $|\overline{Qp_1}|^2 = 4r_1\rho$ in Teil b). Aus dem Satz des Pythagoras folgt dann:

$$\begin{aligned}
|\overline{p_1p_2}|^2 &= (2\rho)^2 + (|\overline{Q'p_2}| - |\overline{Qp_1}|)^2 \\
&= 4\rho^2 + 4(\sqrt{r_2\rho} - \sqrt{r_1\rho})^2 \\
&= 4\left(\rho^2 + r_2\rho + r_1\rho - 2\rho(\sqrt{r_2 r_1})\right) \\
&= 4\rho\left(\rho + r_2 + r_1 - 2\sqrt{\rho}\right) \\
&= 4\rho\left(1 + \rho - 2\sqrt{\rho}\right) \\
&= \left(2\sqrt{\rho}(1 - \sqrt{\rho})\right)^2.
\end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir für den Durchmesser d:

$$d = 2\rho + 2\sqrt{\rho}(1 - \sqrt{\rho}) = 2\sqrt{\rho}(\sqrt{\rho} + 1 - \sqrt{\rho}) = 2\sqrt{\rho}.$$

Der Flächeninhalt des Kreises ist daher $\pi d^2/4 = \pi\rho = \pi r_1 r_2$. Der Flächeninhalt des Arbelos ist die Differenz der Flächeninhalte des großen und der beiden kleinen Halbkreise, also $\pi(r_1 + r_2)^2/2 - \pi r_1^2/2 - \pi r_2^2/2 = \pi r_1 r_2$. Damit stimmen die beiden Flächeninhalte überein. $\square$

Aufgabe 4

2+2+2+2+2 Punkte

Sei X eine Menge von 2019 verschiedenen Punkten in der Ebene. Jeder Punkt P habe dabei genau einen Punkt Q, der ihm am nächsten ist. Dieser Punkt Q heiße *Nachbar* von P und wird mit diesem durch eine Strecke verbunden. Die Menge aller eingezeichneten Strecken sei S.

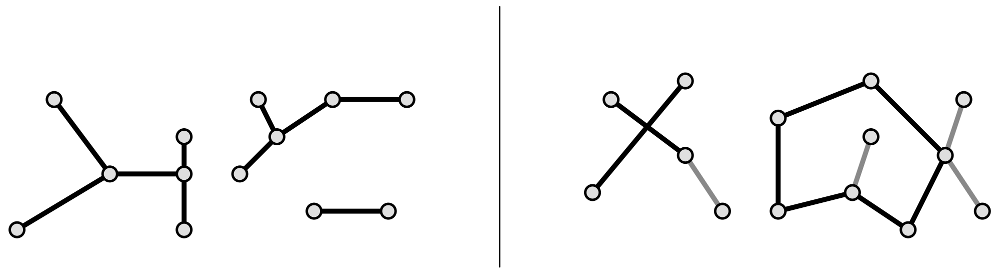
a) Beweist, dass die Menge S mindestens 1010 Strecken enthält. Beschreibt ein Beispiel für eine Menge X, sodass es genau 1010 Strecken in S gibt.

b) Beweist, dass es mindestens einen Punkt gibt, der nicht Nachbar irgendeines anderen Punktes ist.

c) Beweist, dass kein Punkt Endpunkt von mehr als fünf Strecken ist.

d) Beweist, dass sich keine zwei Strecken in ihrem Inneren schneiden.

e) Beweist, dass S keinen geschlossenen Streckenzug enthält.



Beispiele für eine mögliche und eine nicht mögliche Streckenmenge S

Das Beispiel links in der Abbildung zeigt eine Streckenmenge S, die aus der oben beschriebenen Prozedur entstanden ist. Die Streckenmenge rechts dagegen enthält sich schneidende Strecken und einen geschlossenen Streckenzug, sodass sie in keinem Fall auftreten kann.

Lösung

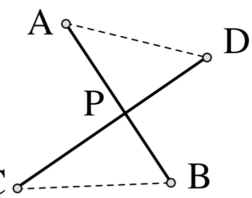
a) Da jeder Punkt einen Nachbar hat, geht von jedem Punkt mindestens eine Strecke aus. Da jede Strecke zwei Punkte verbindet, gibt es mindestens 2019/2 Strecken, also mindestens 1010. Ein Beispiel für eine Menge X mit genau 1010 Strecken in S ist eine Punktmenge, bei der es 1009 Paare von Punkten gibt, die jeweils nah beieinander sind, und bei der die einzelnen Paare sowie der 2019. Punkt jeweils weit entfernt voneinander sind. Bei den 1009 Punktepaaren sind die Punkte gegenseitig Nachbarn und durch eine

Strecke verbunden. Der 2019. Punkt hat einen Nachbarn unter den anderen 2018 Punkten, der durch die 1010. Strecke verbunden ist.

b) Zunächst entfernen wir alle Paare von Punkten P und Q, bei denen Q nur Nachbar von P und keinem weiteren Punkt ist und P nur Nachbar von Q und keinem anderen Punkt ist. Da 2019 ungerade ist, bleibt eine ungerade Anzahl an Punkten über. Ein einzelner Punkt kann dabei nicht über bleiben, da wir dann seinen Nachbarn bereits entfernt hätten, im Widerspruch dazu, dass jener Punkt nur Nachbar seines Nachbars ist.
Wir betrachten unter den verbleibenden Punkten ein Paar P_1 und P_2, die den minimalen Abstand zueinander haben. P_1 ist dann der Nachbar von P_2 und P_2 der Nachbar von P_1. Nach Voraussetzung muss es dann noch einen weiteren Punkt P_3 geben, dessen Nachbar P_1 oder P_2 ist. Da jeder Punkt genau einen Nachbar hat, kann es nur dann keinen Punkt geben, der nicht Nachbar eines anderen Punktes ist, wenn kein Punkt der Nachbar von mehr als einem Punkt ist. Doch dass dies nicht der Fall ist, haben wir gerade gezeigt, folglich muss es einen Punkt geben, der kein Nachbar eines anderen Punktes ist.

c) Wir betrachten einen Punkt P, der mit zwei Punkten P_1 und P_2 durch Strecken verbunden ist. Ist weder P_1 noch P_2 der Nachbar von P, so ist P der Nachbar von P_1 und P_2. Folglich gilt $|\overline{PP_1}| < |\overline{P_1P_2}|$ und $|\overline{PP_2}| < |\overline{P_1P_2}|$, sodass $\overline{P_1P_2}$ die längste Strecke des Dreiecks $\triangle PP_1P_2$ ist. Ist sagen wir P_1 der Nachbar von P, so ist P der Nachbar von P_2. Daher gilt $|\overline{PP_1}| < |\overline{PP_2}|$ und $|\overline{PP_2}| < |\overline{P_1P_2}|$, sodass $\overline{P_1P_2}$ wiederum die längste Strecke des Dreiecks $\triangle PP_1P_2$ ist. Da der längsten Seite eines Dreiecks der größte Winkel gegenüber liegt, gilt damit $|\angle P_1PP_2| > 60°$. Insbesondere können nicht mehr als fünf Strecken an P treffen, da sonst ein Winkel kleiner oder gleich $60°$ auftreten würde.

d) Angenommen, es gibt ein Paar sich schneidender Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$. Den Schnittpunkt bezeichnen wir mit P (welcher nicht Teil der 2019 Punkte ist).



Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ kreuzen sich

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ in der Menge, weil B der Nachbar von A und D der Nachbar von C ist. Dann gilt $|\overline{AB}| < |\overline{AD}|$ und $|\overline{CD}| < |\overline{CB}|$, sodass $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| < |\overline{AD}| + |\overline{CB}|$.
In jedem Dreieck $\triangle XYZ$ gilt die *Dreiecksungleichung*: $|\overline{XY}| < |\overline{XZ}|+|\overline{ZY}|$. Diese wenden wir auf die Dreiecke $\triangle DAP$ und $\triangle CBP$ an und erhalten $|\overline{AD}| < |\overline{PD}| + |\overline{AP}|$ und $|\overline{CB}| < |\overline{CP}| + |\overline{PB}|$. Die beiden Ungleichungen zusammen ergeben

$$|\overline{AD}|+|\overline{CB}| < |\overline{PD}|+|\overline{AP}|+|\overline{CP}|+|\overline{PB}| = (|\overline{AP}|+|\overline{PB}|)+(|\overline{CP}|+|\overline{PD}|) = |\overline{AB}|+|\overline{CD}|.$$

Insgesamt haben wir die Ungleichungskette $|\overline{AB}| + |\overline{CD}| < |\overline{AD}| + |\overline{CB}| < |\overline{AB}| + |\overline{CD}|$. Dieser Widerspruch zeigt, dass es keine sich in ihrem Inneren schneidende Strecken geben kann.

e) Angenommen, die Strecken $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$, …, $\overline{P_{k-1}P_k}$ und $\overline{P_kP_1}$ kommen alle in S vor, wobei $k \geq 3$.
Es können nicht sowohl P_2 als auch P_k Nachbar von P_1 sein, ohne Einschränkung sei P_2 nicht der Nachbar von P_1. Damit die Strecke $\overline{P_1P_2}$ auftritt, muss dann aber P_1 der Nachbar

von P_2 sein, sodass $|\overline{P_1P_2}| < |\overline{P_2P_3}|$. Da jeder Punkt genau einen Nachbar hat, folgt aus der Existenz der Strecke $\overline{P_2P_3}$ daher, dass P_2 der Nachbar von P_3 ist und $|\overline{P_2P_3}| < |\overline{P_3P_4}|$. Per Induktion folgt, dass P_j der Nachbar von P_{j-1} ist und damit $|\overline{P_{j-1}P_j}| < |\overline{P_jP_{j+1}}|$. Da aber auch $\overline{P_kP_1}$ eine Strecke ist, ist dann auch P_k der Nachbar von P_1 und $|\overline{P_kP_1}| < |\overline{P_1P_2}|$. Dem entnehmen wir aber die unmögliche Ungleichungskette

$$|\overline{P_1P_2}| < |\overline{P_2P_3}| < |\overline{P_2P_3}| < \ldots < |\overline{P_kP_1}| < |\overline{P_1P_2}|.$$

Der Widerspruch zeigt, dass es keinen geschlossenen Streckenzug in der Menge S geben kann. $\square$