Schule:	**Team:**	PUNKTE

Aufgabe 1: Irgendwas mit 2025

(Aufgabe (a): 2 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 1 Punkt, (d): 4 Punkte)

(a) Die Jahreszahl 2025 ist darstellbar als das Quadrat einer natürlichen Zahl. In wievielen Jahren ab dem Jahr 1 bis einschließlich 2025 war dies bereits möglich? In welchem Jahr war dies zuletzt vor 2025 der Fall und wann wird nach 2025 als nächstes die Jahreszahl das Quadrat einer natürlichen Zahl sein? Man begründe die Antworten.

(b) Für zwei aufeinanderfolgende Primzahlen größer 2 zeige man, dass die Differenz ihrer Quadrate stets gerade ist.

(c) Untersucht, ob die Aussage (b) auch gilt, wenn man anstelle von Primzahlen zwei beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen betrachtet. Begründet eure Antwort.

(d) Wir definieren $n_1, \ldots, n_9$ wie folgt:

- $n_1 = 1 \ldots 1$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Einsen besteht)
- $n_2 = 2 \ldots 2$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Zweien besteht)
- $n_3 = 3 \ldots 3$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Dreien besteht)
- $n_4 = 4 \ldots 4$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Vieren besteht)
- $n_5 = 5 \ldots 5$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Fünfen besteht)
- $n_6 = 6 \ldots 6$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Sechsen besteht)
- $n_7 = 7 \ldots 7$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Siebenen besteht)
- $n_8 = 8 \ldots 8$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Achten besteht)
- $n_9 = 9 \ldots 9$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Neunen besteht)

Sei nun $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$ die Summe dieser neun Zahlen. Untersucht ob n und die (einfache) Quersumme von n jeweils Quadratzahlen sind.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	**Team:**	PUNKTE

Aufgabe 2: Waste your money

(Aufgabe (a): 5 Punkte, (b): 5 Punkte)

Jan zockt regelmäßig das Online-Glückspiel *Waste your Money*, bei dem man seinen Einsatz entweder verliert oder verdoppelt (falls man gewinnt). Über die Gewinnwahrscheinlichkeit ist zunächst nichts bekannt. Jans Spielstrategie sieht folgendermaßen aus: Er setzt in jeder Runde den gleichen prozentualen Anteil seines aktuell vorhandenen Spielkapitals ein, und hofft, dass er gewinnt.

Beispiel: Wenn er 10 Euro hat, von denen er die Hälfte einsetzt, so hat er in der nächsten Spielrunde entweder nur noch 5 Euro, wenn er verliert, oder 15 Euro, wenn er gewinnt. Sofern er weiterspielt, wird er dementsprechend als nächstes 2,50 Euro oder 7,50 Euro einsetzen.

(a) Als er neulich einmal einen ganzen Nachmittag gespielt hatte, hatte er am Abend gleich viele Runden gewonnen wie verloren. Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

(b) Tatsächlich liegen die Gewinnchancen liegen bei 60%; das bedeutet, dass von je 100 Spielen durchschnittlich 60 gewonnen werden. Jan hält es für eine gute Strategie, in jedem Spiel immer die Hälfte seines aktuellen Spielkapitals einzusetzen. Zeigt, dass Jan mit dieser Spielstrategie langfristig verliert.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	Team:	PUNKTE

Aufgabe 3: Würfel und Partys

(Aufgabe (a): 2 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 3 Punkte, (d): 2 Punkte)

(a) Ayleen möchte die Ecken eines sechsseitigen Spielwürfels rot anmalen, sodass jede Ecke, die nicht rot angemalt ist, mindestens 2 rote benachbarte Ecken hat. Wieviele Ecken muss sie dafür mindestens anmalen?

(b) Ayleen hat nun auf fünf der sechs Würfelseiten eine vierseitige Pyramide bündig aufgeklebt, sodass ihr neues Gebilde nun 13 Ecken hat. Wieviele Ecken muss sie jetzt rot anmalen, damit jede Ecke, die nicht rot angemalt ist, jetzt mindestens 3 rote benachbarte Ecken hat?

(c) Auf einer Party treffen sich n Leute, einige geben sich zur Begrüßung die Hand, wobei jede Person mindestens einer anderen Person die Hand gibt. Zeigt, dass es eine Teilmenge S von weniger oder gleich $n/2$ Personen gibt, sodass jede Person außerhalb von S mindestens einer Person in S die Hand gegeben hat.

(d) Auf einer Party treffen sich n Leute, einige geben sich zur Begrüßung die Hand, wobei jede Person mindestens 2 anderen Personen die Hand gibt. Zeigt, dass der Fall auftreten kann, dass es eine Gruppe S von Personen gibt, die weniger als $(n/2 + 1)$ Mitglieder hat, sodass jede Person außerhalb von S mindestens zwei Personen in S die Hand gegeben hat.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Schule:	**Team:**	PUNKTE

Aufgabe 4: Das Runde muss (genau) ins Eckige

(Aufgabe (a): 2 Punkte, (b): 4 Punkte, (c): 4 Punkte)

(a) Es sei Q ein Quadrat mit Seitenlänge 1 und Inkreis K. Berechne das Verhältnis des Umfangs von Q zum Umfang von K. Bereche außerdem das Verhältnis des Flächeninhalts von Q zum Flächeninhalt von K.

(b) Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, also ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises K sind (s. Abbildung). Das Verhältnis des Umfangs vom Viereck $ABCD$ zum Umfang von K sei 5:3. Was ist das Verhältnis des Flächeninhalts vom Viereck $ABCD$ zum Flächeninhalt von K?

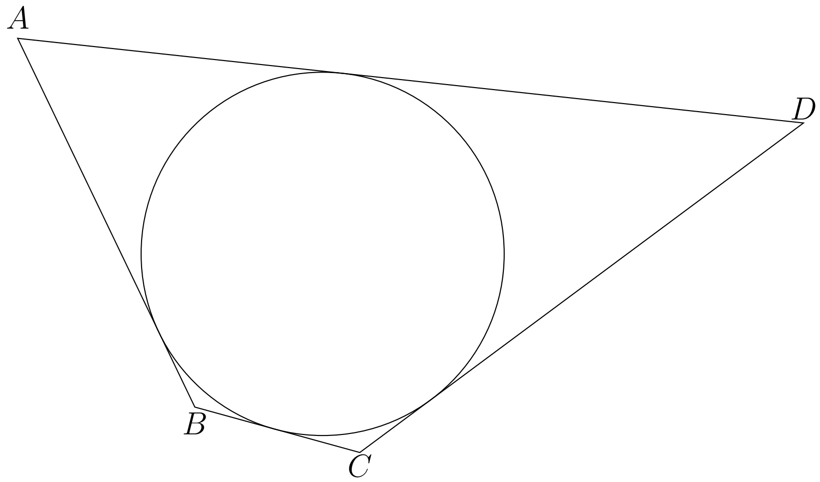

Abbildung 1: Tangentenviereck mit Inkreis K

(c) Nun gehen wir in drei Dimensionen: Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, also eine Pyramide dessen Grundseite auch ein Dreieck ist. Jedes Tetraeder besitzt eine Inkugel, also eine Kugel die jede Seite des Tetraeders berührt. Nun bezeichnet K die Inkugel von $ABCD$. Außerdem ist bekannt, dass das Verhältnis vom Oberflächeninhalt von $ABCD$ zum Oberflächeninhalt von K gleich 5:3 ist. Was ist das Verhältnis vom Volumen von $ABCD$ zum Volumen von K?

Hinweis. Das Tetraedervolumen kann man mit der Formel $\frac{1}{3}hG$ berechnen, wobei G der Flächeninhalt der Grundseite ist und h die Höhe vom vierten Eckpunkt auf die Grundseite. Eine Kugel mit Radius r hat Oberflächeninhalt $4\pi r^2$ und Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.