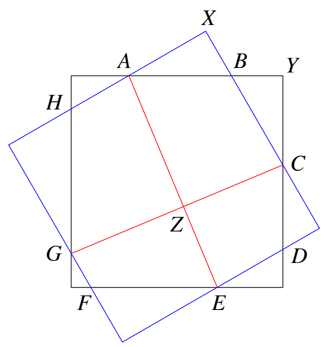
Team-Nummer:	Team-Name:	Punkte:

Aufgabe 1: Überlappende Bierdeckel *(10 Punkte)*

Wir betrachten einen auf einem Tisch liegenden quadratischen Bierdeckel Q mit Seitenlänge 1. Auf diesem liegt ein weiterer quadratischer Bierdeckel R mit Seitenlänge $r > 0$ derart, sodass sich auf jeder der vier Seiten von Q stets zwei Schnittpunkte mit dem Rand von R befinden. Die Schnittpunkte seien im Uhrzeigersinn mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet.



Des Weiteren führen wir noch die in der Skizze abgebildeten Eckpunkte X, Y sowie den Schnittpunkt Z der beiden Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ ein.

a) Angenommen, die Bierdeckel hätten denselben Mittelpunkt und es gelte $r = 1$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Polygons mit den Eckpunkten $ABCDEFGH$ größer als $\frac{3}{4}$ sein muss.

b) Begründen Sie, dass sich die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ stets in einem rechten Winkel schneiden. Hierbei können die Mittelpunkte von R und Q nun möglicherweise wieder verschieden sein – ebenso deren Seitenlängen.

c) Beweisen Sie, dass die Punkte A, X, Y und Z auf einem Kreis liegen.

Team-Nummer:	Team-Name:	Punkte:

Aufgabe 2: Vorzeichenwechsel *(10 Punkte)*

a) Entscheiden und begründen Sie, ob man den Wert $S = 21$ erhalten kann, wenn man in der Gleichung

$$S = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm 4^2 \pm 5^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder durch $-$ ersetzt.

b) Zeigen Sie, dass man den Wert $S = 0$ erhalten kann, wenn man in der Gleichung

$$S = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm 4^2 \pm 5^2 \pm 6^2 \pm 7^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder $-$ ersetzt.

c) Bestimmen Sie nun den kleinsten Wert $S \geq 0$, den man erhalten kann, wenn man in der Gleichung

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \ldots \pm 1111^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder $-$ ersetzt.

d) Ermitteln Sie schließlich den kleinsten Wert $S \geq 0$, den man erreichen kann, wenn man in der Gleichung

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \ldots \pm 2025^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder $-$ ersetzt.

Team-Nummer:	Team-Name:	Punkte:

Aufgabe 3: Eingekreist! *(10 Punkte)*

Sei P eine Menge von n paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene. Eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq P$ von Punkten heißt *einkreisbar*, falls ein Kreis existiert, der alle Punkte aus A umschließt, aber keinen weiteren Punkt aus $P \setminus A$ enthält.

a) Wie viele verschiedene einkreisbare Mengen gibt es, wenn die Punkte von P alle auf einem Kreis K liegen?

b) Sei Q eine vierelementige Punktmenge, sodass keine drei Punkte aus Q auf einer Geraden und nicht alle vier auf einem Kreis liegen (Q ist in allgemeiner Lage). Zeigen sie, dass die Anzahl der dreielementigen einkreisbaren Teilmengen von Q bestimmt, ob die konvexe Hülle von Q drei oder vier Ecken hat.

c) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gegeben. Zeigen Sie, dass eine einkreisbare Teilmenge von P mit m Punkten existiert.

d) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es mindestens $n - m + 1$ verschiedene einkreisbare Teilmengen von P mit m Punkten gibt.

Bemerkung: Die konvexe Hülle von Q ist die kleinste konvexe Menge, die Q enthält. Eine Menge K heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten aus K auch deren Verbindungsstrecke vollständig in K liegt.

Team-Nummer:	Team-Name:	Punkte:

Aufgabe 4: Zahlenfolgen *(10 Punkte)*

Gegeben sei eine Zahl a mit der Eigenschaft $0 < a < 1$, sowie eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ welche die Bedingung

$$x_1 = a \quad \text{und} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Wir bezeichnen a als Startwert der Folge.

a) Angenommen, Sie starten die Folge einmal beim Startwert $\frac{1}{3}$ und ein weiteres Mal beim Startwert $\frac{2}{3}$. Erklären Sie, warum sich die beiden daraus resultierenden Folgen an der 2025igsten Stelle unterscheiden müssen.

b) Begründen Sie, dass eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_m < m - 1$ gilt. Dabei dürfen Sie ohne Beweis annehmen, dass $x_m < m \cdot x_1$ ist für alle $m \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie, dass zwei Zahlen $S, T \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft existieren: Für jeden Startwert und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $S \leq x_n \leq T$.