(a) Die folgenden Abbildungen 1 und 2a zeigen zwei verschiedene Zerlegungen in jeweils neun Rechtecke. Die Abbildung 2b ist dagegen nicht von der Zerlegung aus Abbildung 2a verschieden. Lediglich die Anordnung der Teilrechtecke ist unterschiedlich.

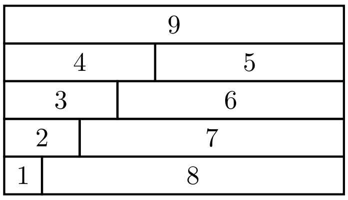


Abbildung 1

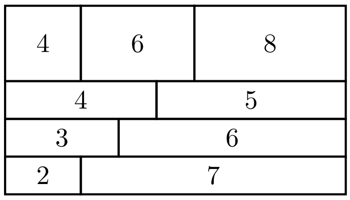


Abbildung 2a

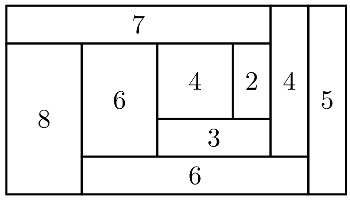


Abbildung 2b

(Die Zahlen in den Rechtecken geben den jeweiligen Flächeninhalt in cm^2 an. Sie werden für die Argumentation in (b) benötigt.)

Mögliche Überlegungen zu (a) und/oder (b)

Der Flächeninhalt des gegebenen Rechtecks beträgt $45\,\mathrm{cm}^2$. Ein Lösungsansatz besteht darin, die Zahl 45 in möglichst viele Summanden zu zerlegen. Diese Summanden entsprechen dabei den Flächeninhalten der Teilrechtecke.

Eine mögliche Zerlegung ist die folgende mit neun verschiedenen Summanden

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

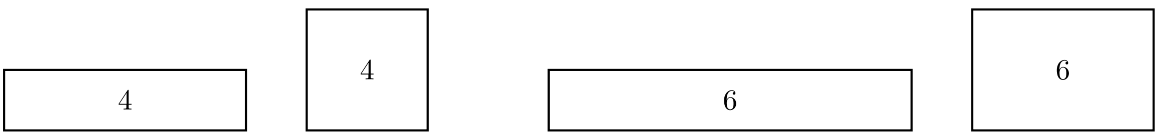
Abbildung 1 zeigt, dass das große Rechteck tatsächlich in neun nicht deckungsgleiche Rechtecke mit diesen Flächeninhalten und ganzzahligen Seitenlängen zerlegt werden kann.

Durch die Zerlegung in verschiedene Summanden stellen wir auf jeden Fall sicher, dass keine zwei Rechtecke in der zugehörigen Zerlegung des großen Rechtecks deckungsgleich sind.

Es könnten aber auch Summanden mehrfach auftreten, wenn es für sie verschiedene ganzzahlige Produktdarstellungen gibt. So lassen sich z. B. 4 und 6 darstellen als

$$4=1\cdot 4=2\cdot 2 \quad \text{und} \quad 6=1\cdot 6=2\cdot 3.$$

Die beiden Produktdarstellungen der Zahl 4 entsprechen dabei zwei nicht deckungsgleichen Rechtecken mit den Seitenlängen 1 cm und 4 cm sowie 2 cm und 2 cm, die denselben Flächeninhalt (nämlich $4\,\mathrm{cm}^2$) haben. Ebenso gibt es zwei nicht deckungsgleiche Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen, die den Flächeninhalt $6\,\mathrm{cm}^2$ haben.



Auch die Zahlen 8 und auch 9 könnten theoretisch als Summanden in der gesuchten Summendarstellung der Zahl 45 zweimal vorkommen, falls die Summe 45 damit nicht überschritten werden würde. (Wir werden aber unter (b) sehen, dass dies für 8 und 9 nicht geht.) Die Zahlen 1, 3, 5, 7 haben dagegen nur eine ganzzahlige Produktdarstellung, sie dürfen daher höchstens einmal vorkommen.

Möchten wir die Zahl 45 in möglichst viele Summanden zerlegen, sollten wir Summen mit möglichst kleinen Summanden bilden. Da beispielsweise $1+2+3+4+4+5+6+6+7=38$ gilt und $1+2+3+4+4+5+6+6+7+8=46$ ist, ist die Summe

$$2+3+4+4+5+6+6+7+8=45$$

folglich eine weitere Zerlegung der Zahl 45 in neun Summanden. Abbildungen 2a und 2b zeigen, dass das große Rechteck tatsächlich in neun nicht deckungsgleiche Rechtecke mit diesen Flächeninhalten und ganzzahligen Seitenlängen zerlegt werden kann.

(b) Um zu begründen, dass eine Zerlegung in mehr als neun verschiedene Rechtecke, von denen keine zwei deckungsgleich sind, nicht möglich ist, gehen wir von der oben schon betrachteten Zerlegung mit neun verschiedenen Summanden

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

aus. Hinzugefügt werden könnten prinzipiell nur die Zahlen 4, 6, 8 und 9 (die dann doppelt auftreten würden).

- Würde man nur eine dieser Zahlen hinzufügen, so erhielte man zehn Summanden, die Summe würde aber die 45 überschreiten. Dies ist also nicht möglich.
- Man müsste also mindestens zwei der Zahlen 4, 6, 8 und 9 hinzufügen (die dann doppelt auftreten), und dann eine der Zahlen entfernen. Die kleinsten hinzufügbaren Zahlen wären 4 und 6. Die Summe erhöht sich damit um 10. Dies lässt sich nicht durch Hinwegnahme einer der Zahlen ausgleichen.
- Würde man zwei andere Zahlen (also 6 und 8, 6 und 9 oder 8 und 9) hinzufügen (also doppelt auftreten lassen) würde sich die Summe noch stärker vergrößern.
- Noch weniger ist die Hinzunahme dreier von den Zahlen 4, 6, 8 und 9 möglich, da die Summe (nach Wegnahme zweier Zahlen) noch stärker über 45 steigt.

Es kann also keine Zerlegung des großen Rechtecks in zehn Teilrechtrecke geben, wenn wir fordern, dass davon keine zwei deckungsgleich sein sollen. Offensichtlich ist dies für elf oder mehr Teilrechtecke erst recht nicht möglich.

Alternative (kürzere) Lösung für (b)

Man betrachtet (nach den vorherigen Überlegungen, dass Rechtecke mit den Flächeninhalten 4 und 6 doppelt auftreten können) einfach die 10 flächenkleinsten Rechtecke, die auftreten können:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 7 + 8 = 46$$

Diese Summe ist also schon zu groß, und eine kleinere Flächensumme lässt sich mit 10 Rechtecken nicht erreichen.

Bepunktungsvorschlag:

(a) 3 Punkte: Angabe einer Zerlegung in neun nicht-kongruente Rechtecke

2 Punkte: Angabe einer zweiten Zerlegung in neun nicht-kongruente Rechtecke

(b) 1 Punkt: Zerlegung der Zahl 45 in neun verschiedene Summanden (kann auch unter (a) erfolgen)

2 Punkte: Mehrfaches Auftreten von Summanden (keine Primzahlen),

Argument: Nur die Summanden 4 und 6 können doppelt auftreten

2 Punkte: Begründung: Zerlegung in mehr als 9 Rechtecke ist nicht möglich.

(a) Es könnte z. B. folgende Tabelle entstehen, in den Zeilen lesen wir die zugehörigen Zahlenmengen ab:

$n-1$	n	$n+1$	n^2+1
0	1	2	2
1	2	3	**5**
2	3	4	**10**
3	4	**5**	17
4	**5**	6	26
5	6	7	37
6	7	8	**50**
7	8	9	**65**
8	9	**10**	82
9	**10**	11	101

(b) Die in der Tabelle fett gedruckten Zahlen sind durch 5 teilbar, da sie entweder auf 0 oder 5 enden.

(c) Von den fünf aufeinander folgenden Zahlen $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ und $n+2$ muss eine durch 5 teilbar sein.

Falls $n-1$, n oder $n+1$ durch 5 teilbar ist, dann gibt es in der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ eine durch 5 teilbare Zahl.

Falls dies nicht der Fall ist, muss $n-2$ oder $n+2$ durch 5 teilbar sein. Daher muss auch das Produkt $(n-2)(n+2)$ durch 5 teilbar sein. (Teilbarkeit des Produkts, falls einer der Faktoren durch 5 teilbar ist.)

Nun ist $(n-2)(n+2) = n^2 - 4 = (n^2+1) - 5$. Somit muss auch n^2+1 durch 5 teilbar sein. (Teilbarkeit der Summe, falls beide Summanden durch 5 teilbar sind.)

Fazit: In jedem Fall ist also eine der Zahlen der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ durch 5 teilbar.

Alternativlösung zu (c):

Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer 0 oder 5 ist.

Die letzte Ziffer der Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 hängt aber jeweils nur von der letzten Ziffer von n ab:

- Die Behauptung ist für die Zahlen $n-1$, n und $n+1$ sofort einleuchtend.
- Dass die Einerziffer des Quadrats einer natürlichen Zahl ebenfalls nur vom Quadrat der Einerziffer abhängt, sieht man leicht, wenn man die Zahl in Zehner und Einer zerlegt: Für $n = m \cdot 10 + k$, wobei m eine natürliche Zahl und $k = 0, 1, \ldots, 9$ ist, gilt:

$$n^2 = m^2 \cdot 10^2 + 2mk \cdot 10 + k^2 = (10m^2 + 2mk) \cdot 10 + k^2.$$

Beispiel: Die Einerziffer von

$$3\mathbf{7}^2 = (30 + \mathbf{7})^2 = 3^2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 10 + \mathbf{7^2} = (90 + 42) \cdot 10 + \mathbf{4\underline{9}} = 1320 + \mathbf{4\underline{9}} = 136\underline{\mathbf{9}}$$

hängt nur von der Einerziffer 7 und nicht von der Ziffer 3 ab.

Es reicht also, für jeweils eine Zahl mit der Endziffer 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 zu prüfen, ob mindestens eine der Zahlen aus der Menge $\{n-1, n, n+1, n^2+1\}$ die Endziffer 0 oder 5 hat.

Dies wurde bereits in Teilaufgabe (b) erledigt.

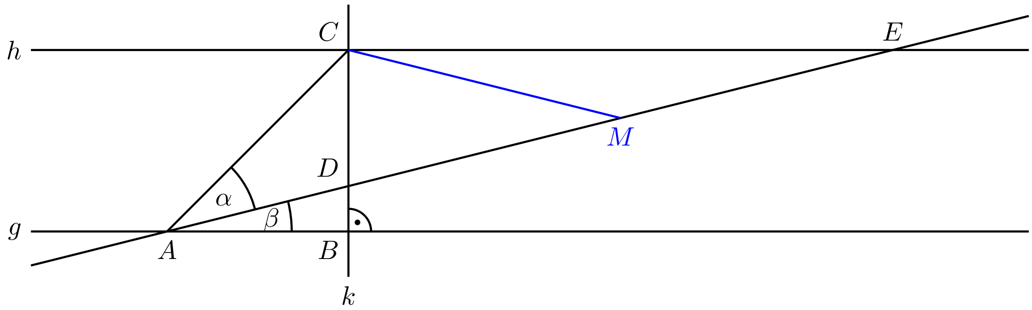
Bepunktungsvorschlag:

(a) 3 Punkte

(b) 1 Punkt

(c) 6 Punkte

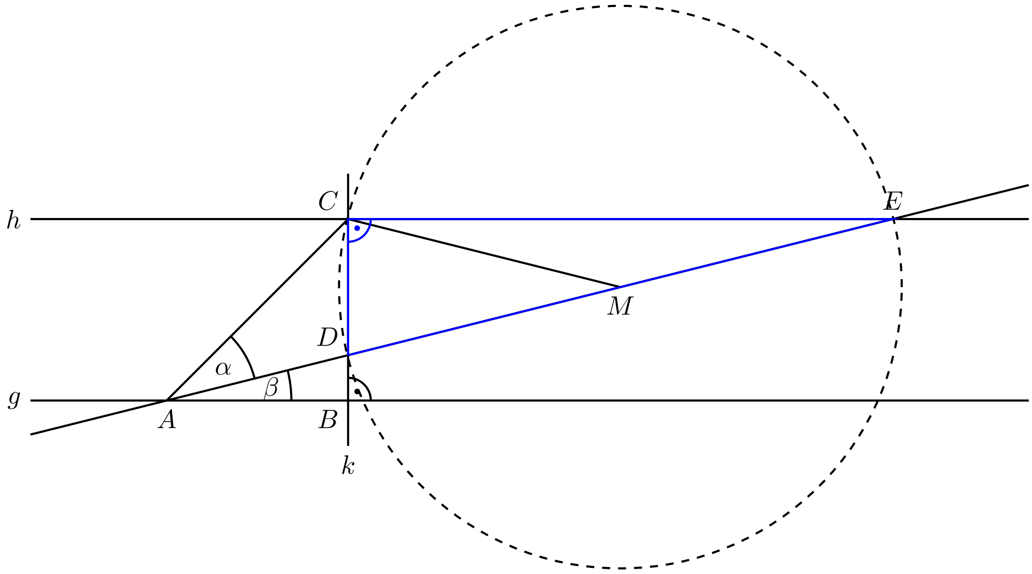
(a) Wir ergänzen die Skizze zunächst um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{DE}$ und die Strecke $\overline{MC}$:



Man kann nun auf verschiedene Weisen begründen, dass $\overline{MC}$ so lang wie $\overline{MD}$ ist:

(1) Mit der Umkehrung vom Satz des Thales:

Dazu betrachten wir den Kreis K mit Mittelpunkt M und Durchmesser $\overline{DE}$ und das Dreieck ΔCDE:



Im Dreieck ΔCDE ist $\angle DCE$ ein rechter Winkel, da die Gerade k senkrecht auf h steht. Dem rechten Winkel $\angle DCE$ liegt die Seite $\overline{DE}$ gegenüber. Nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt der Punkt C auf dem Kreis K.

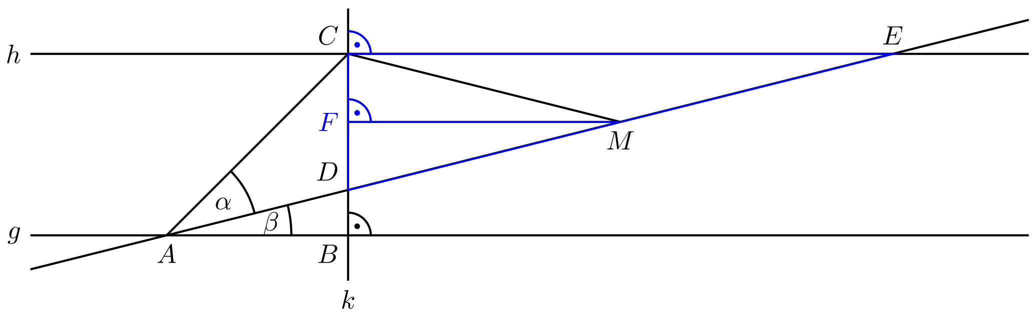
Da M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$ ist, ist M auch Mittelpunkt des Kreises K. Die Strecke $\overline{CM}$ ist somit ein Radiussegment von K und es gilt

$$\overline{CM} = \overline{DM} = \tfrac{1}{2}\overline{DE}.$$

Folglich ist ΔCDM ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis $\overline{CD}$.

(2) Mithilfe des ersten Strahlensatzes:

Wir betrachten das Lot von M auf die Strecke $\overline{DC}$ und nennen den Lotfußpunkt F:



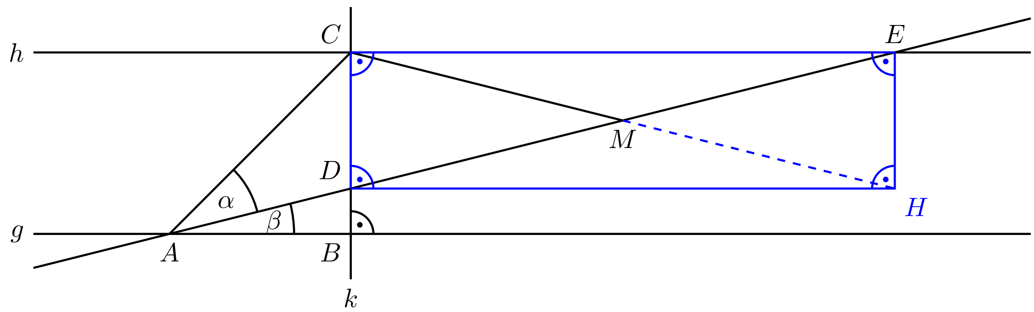
Nach Voraussetzung steht h senkrecht auf k, und nach Konstruktion ist auch FM senkrecht zu k. FM und CE sind demnach parallel. Aus dem ersten Strahlensatz folgt nun:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{ME}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{DE}}{\frac{1}{2}\overline{DE}} = 1.$$

Die Strecken $\overline{DF}$ und $\overline{FC}$ sind also gleich lang. Da außerdem $\measuredangle MFD = \measuredangle MFC = 90°$ gilt und MF eine gemeinsame Seite in beiden Dreiecken ist, folgt mit dem Kongruenzsatz (SWS), dass $\Delta MFC \cong \Delta MFD$. Insbesondere gilt: $\overline{CM} = \overline{DM}$, d. h. das Dreieck ΔCDM ist gleichschenklig mit Basis $\overline{CD}$.

(3) Durch Diagonaleneigenschaften im Rechteck:

Das h senkrecht auf k steht, ist $\measuredangle DCE = 90°$. Wir betrachten das Rechteck $\square DCEH$ mit den Seiten $\overline{DC}$ und $\overline{CE}$:



Die Strecke $\overline{DE}$ ist eine Diagonale des Rechtecks $\square DCEH$. Da sich die Diagonalen in einem Rechteck halbieren, ist der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{DE}$ gerade der Diagonalenschnittpunkt des Rechtecks $\square DCEH$, d. h. DE und CH schneiden sich in M.

Weiterhin halbieren die Diagonalen eines Rechtecks einander. Somit folgt:

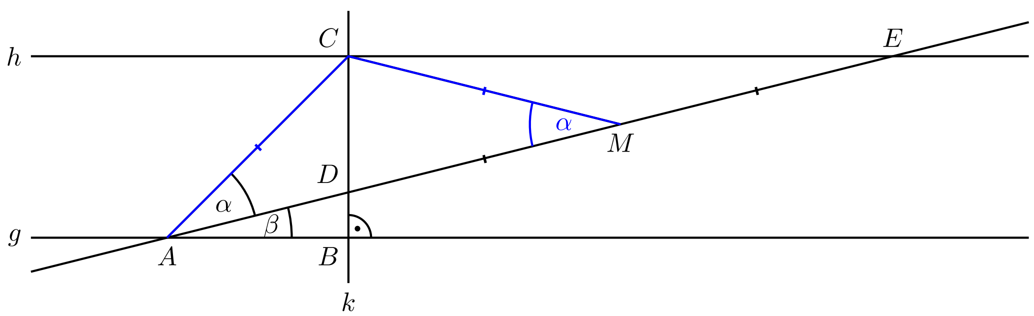
$$\overline{CM} = \tfrac{1}{2}\overline{CH} = \tfrac{1}{2}\overline{DE} = \overline{DM},$$

d. h. das Dreieck ΔCDM ist gleichschenklig mit Basis $\overline{CD}$.

(b) Laut Voraussetzung ist $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \overline{DM} = \overline{ME}$. Zudem gilt $\overline{CM} = \overline{DM}$, da das Dreieck ΔCDM laut Aufgabenteil (a) gleichschenklig ist. Zusammenfassend ergibt sich:

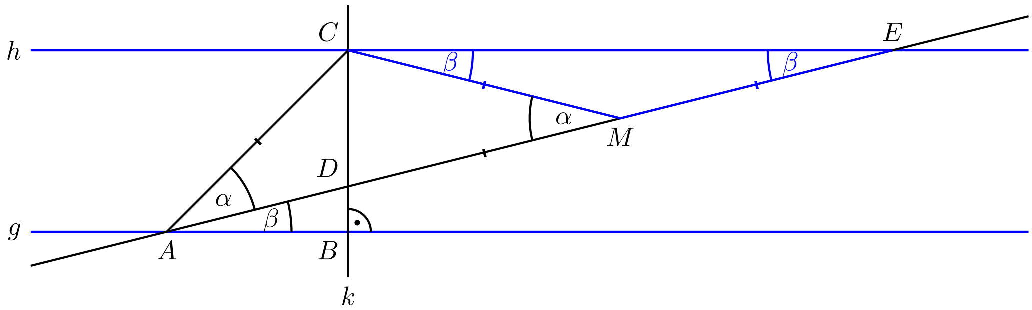
$$\overline{CM} = \overline{DM} = \overline{ME} = \overline{AC}.$$

Das Dreieck ΔACM ist somit ebenfalls gleichschenklig mit Basis AM. Aus dem Basiswinkelsatz folgt, dass $\measuredangle CMA = \measuredangle MAC = \alpha$ gilt.



Aus dem Wechselwinkelsatz folgt weiter, dass der Winkel $\angle MEC$ die Größe β hat, da $\angle BAD$ und $\angle MEC$ Wechselwinkel an den parallelen Geraden g und h sind.

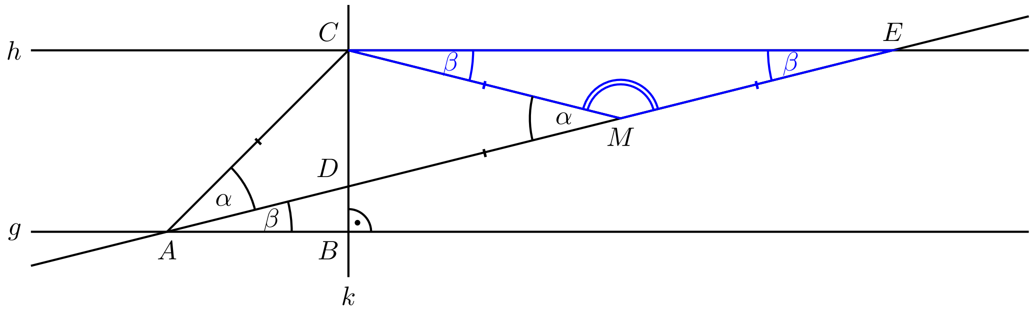
Da $\overline{CM} = \overline{ME}$ gilt, ist ΔCME ebenfalls gleichschenklig. Mit dem Basiswinkelsatz ergibt sich somit $\measuredangle ECM = \measuredangle CEM = \measuredangle BAD = \beta$.



Außerdem gilt $\measuredangle EMC = 180° - \measuredangle CMA = 180° - \alpha$, da $\angle CMA$ und $\angle EMC$ Nebenwinkel sind. Im Dreieck ΔCME folgt nun aus dem Innenwinkelsummensatz

$$\begin{aligned} 180° &= \measuredangle MCE + \measuredangle ECM + \measuredangle EMC \\ &= \beta + \beta + (180° - \alpha) \\ &= 2\beta + 180° - \alpha \\ \Leftrightarrow \qquad \beta &= \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Für $\alpha = 26°$ ergibt sich somit $\beta = \frac{1}{2} \cdot 26° = 13°$.



Bepunktungsvorschlag:

(a) 1 Punkt: Skizze durch Strecke $\overline{CM}$ ergänzen

2 Punkte: Begründung, dass ΔCMD gleichschenklig ist

(b) 1 Punkt: $\overline{CM} = \overline{DM} = \overline{ME} = \overline{AC}$ mit Voraussetzung und (a)

1 Punkt: $\measuredangle CMA = \alpha$ mit Basiswinkelsatz

1 Punkt: $\measuredangle CEM = \beta$ mit Wechselwinkelsatz

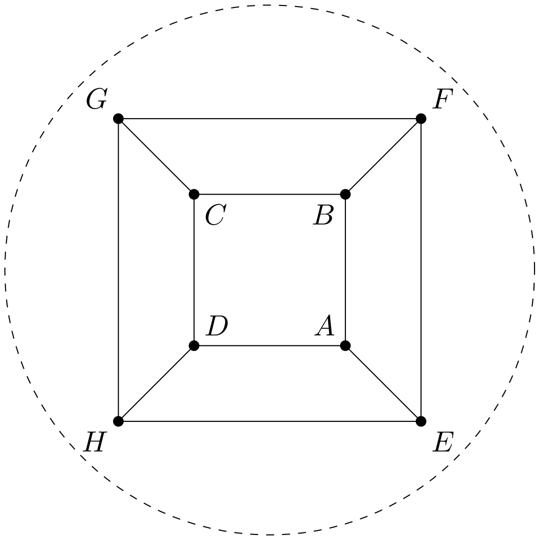
1 Punkt: $\measuredangle ECM = \beta$ mit Basiswinkelsatz

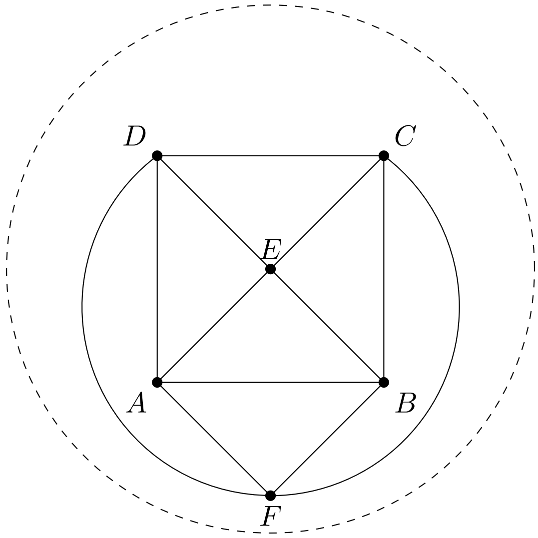
1 Punkt: $\measuredangle EMC = 180° - \alpha$ mit Nebenwinkelsatz

1 Punkt: $180° = \measuredangle EMC + 2\beta$ mit Innenwinkelsummensatz

1 Punkt: Folgerung, dass $\beta = \frac{\alpha}{2} = 13°$

(a) Um den Würfel in ein Schlegeldiagramm zu überführen, drücken wir die obere Fläche $EFGH$ nach unten und dehnen dabei gleichzeitig die untere Fläche $ABCD$ nach außen. Um dagegen das regelmäßige Oktaeder in ein Schlegeldiagramm zu überführen, drücken wir die obere Spitze E nach unten und dehnen die Fläche ΔFCD nach außen.





Wenn man diesen Prozess mit anderen gegenüberliegenden Flächen bzw. Ecken durchführt, erhält man strukturell identische Schlegeldiagramme – nur die Form und Länge der Kanten unterscheidet sich eventuell.

Bepunktungsvorschlag:

- *Je 1 Punkt für ein Schlegeldiagramm des Würfels bzw. des Oktaeders*

(b) Aus dem Schlegeldiagramm des Kuboktaeders können wir schließen:

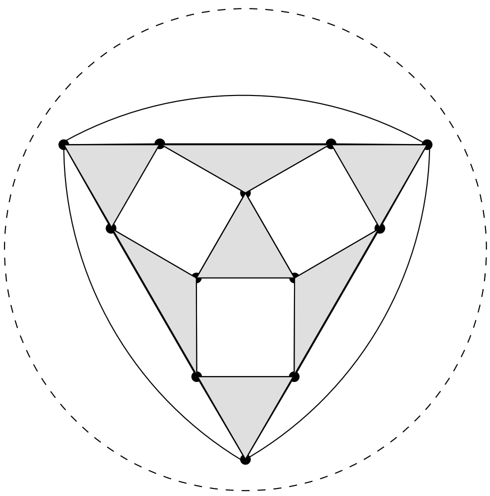
(i) In jeder Ecke treffen sich zwei Vierecke und zwei Dreiecke.

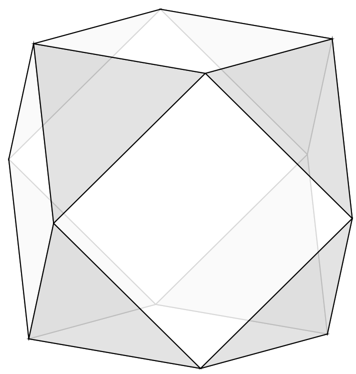
(ii) Ein Kuboktaeder besteht insgesamt aus sechs Vierecken und acht Dreiecken, einschließlich der äußeren Fläche im Schlegeldiagramm.

Bepunktungsvorschlag:

- *Je 1 Punkt für eine korrekt beantwortete Frage*

Die folgende Abbildung zeigt das zum Schlegeldiagramm gehörenden Kuboktaeder:





(c) Wir überlegen uns zunächst, wie viele Fünf- bzw. Sechsecke in den identischen Ecken eines solchen Körpers aufeinandertreffen können.

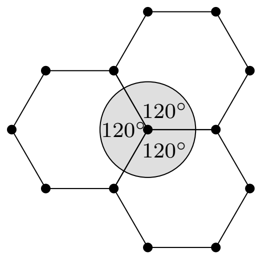
Ein regelmäßiges Fünfeck kann in drei Dreiecke unterteilt werden und hat deswegen eine Innenwinkelsumme von $3 \cdot 180° = 540°$. Jeder Innenwinkel ist also $\frac{540°}{5} = 108°$ groß. Ein regelmäßiges Sechseck kann dagegen in vier Dreiecke zerlegt werden und hat eine Innenwinkelsumme von $4 \cdot 180° = 720°$. Jeder Innenwinkel ist also $\frac{720°}{6} = 120°$ groß.

Die Summe der Innenwinkel, die an einer Ecke aufeinandertreffen, kann nicht größer als 360° sein. Da aber schon $4 \cdot 108° > 360°$ ist, können höchstens drei Fünf- bzw. Sechsecke in einer Ecke aufeinandertreffen. Es müssen aber auch mindestens drei Flächen aufeinandertreffen, damit überhaupt eine Ecke entsteht.

Es können also nur die folgenden Fälle eintreten:

1. Fall: 3 Sechsecke pro Ecke

Wenn sich in einer Ecke drei regelmäßige Sechsecke treffen, ergänzen sich die anliegenden Innenwinkel zu $3 \cdot 120° = 360°$. Mit regelmäßigen Sechsecken kann man eine zweidimensionale Ebene daher lückenlos pflastern.

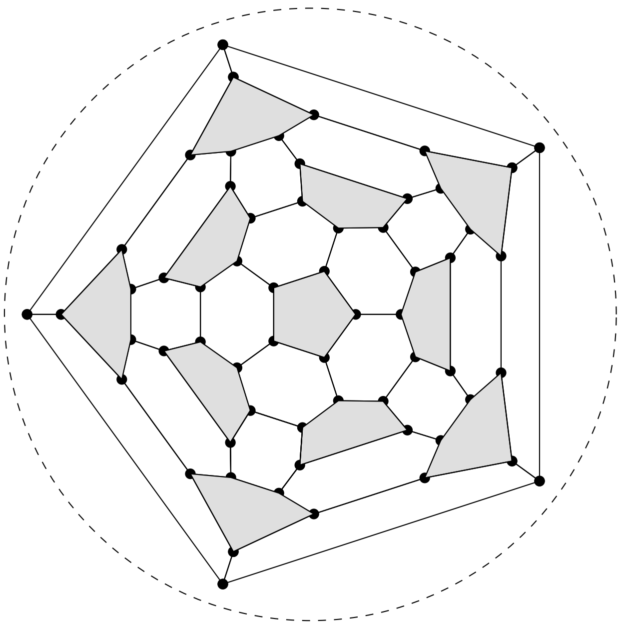


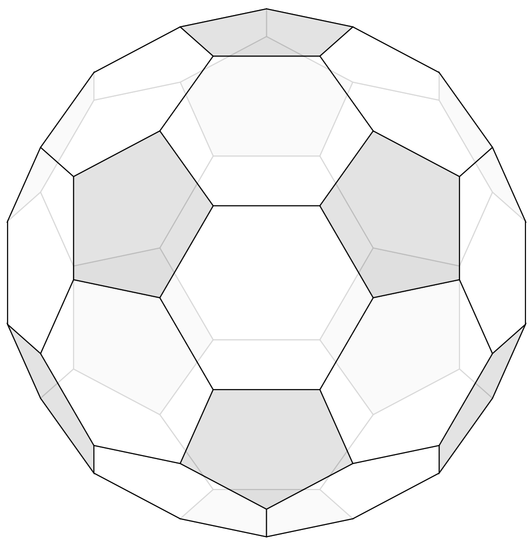
Damit aber eine (konvexe) dreidimensionale Ecke entsteht, müsste die Summe der anliegenden Winkel kleiner sein als 360°. Es gibt also keinen Körper, der nur aus regelmäßigen Sechsecken besteht.

2. Fall: 2 Sechsecke, 1 Fünfeck pro Ecke

Da in diesem Fall in jeder Ecke nur ein Fünfeck anliegen darf, grenzt jedes Fünfeck an fünf Sechsecke. Jedes Sechseck muss dagegen an drei Fünfecke und drei andere Sechsecke grenzen. Wir beginnen mit einem Fünfeck in der Mitte und bauen das Schlegeldiagramm von innen nach außen auf. (Es ist selbstverständlich auch möglich, mit einem zentralen Sechseck zu beginnen.)

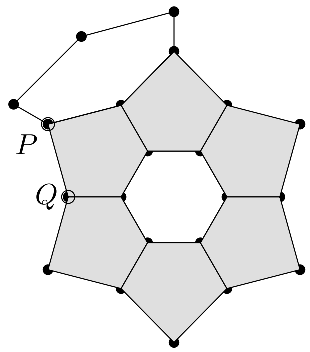
Schließlich erhalten wir das folgende Schlegeldiagramm mit insgesamt zwölf Fünfecken und 20 Sechsecken. Der zugehörige Körper ist ein sogenannter Ikosaederstumpf und erinnert an einen klassischen Fußball.





3. Fall: 1 Sechseck, 2 Fünfecke pro Ecke

In diesem Fall muss jedes Sechseck an sechs Fünfecke grenzen, da in jeder Ecke höchstens ein Sechseck anliegen darf. Daher beginnen wir mit einem zentralen Sechseck und fügen an jeder seiner Seiten an Fünfeck hinzu.

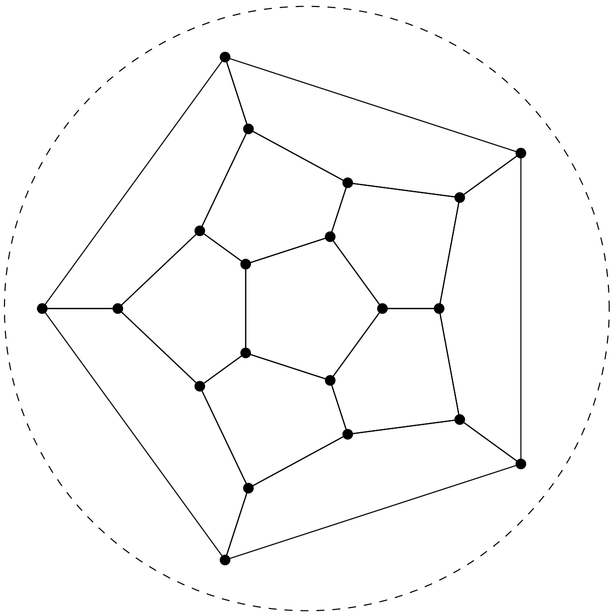


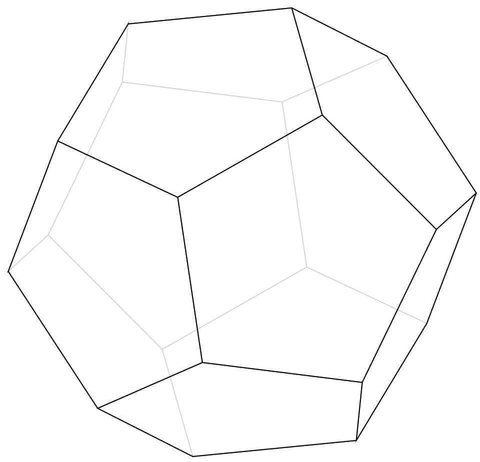
Wenn wir an beliebigen zwei benachbarte Fünfecke nun aber das dort benötigte Sechseck anlegen, stoßen wir dabei auf einen Widerspruch: Im Punkt P muss ein weiteres Fünfeck angelegt werden, im Punkt Q aber ein Sechseck.

Die Kante PQ kann aber auch keine äußere Kante des Schlegeldiagramms sein, da es mehr als sechs äußere Ecken gibt, die äußere Fläche also weder ein Fünfeck noch ein Sechseck sein kann. Daher gibt es keinen Körper, in dessen Ecken sich immer ein Sechseck und zwei Fünfecke treffen.

4. Fall: 3 Fünfecke pro Ecke

Wir erhalten ein Schlegeldiagramm mit insgesamt zwölf Fünfecken. Der dazugehörige Körper ist ein sogenannter *Dodekaeder*.





<u>*Bepunktungsvorschlag:*</u>

- *1 Punkt für eine Begründung, dass aus regelmäßigen Sechsecken kein Körper zusammengesetzt werden kann (1. Fall)*
- *2 Punkte für das Schlegeldiagramm des Ikosaederstumpfes (2. Fall)*
- *1 Punkt für eine Begründung, dass es keinen Körper gibt, in dessen Ecken sich immer ein Sechseck und zwei Fünfecke treffen (3. Fall)*
- *1 Punkt für das Schlegeldiagramm des Dodekaeders (4. Fall)*
- *1 Punkt für eine Begründung, dass die Fallunterscheidung vollständig ist*