Irgendwas mit 2025

(a) Die Jahreszahl 2025 ist darstellbar als das Quadrat einer natürlichen Zahl. In wievielen Jahren ab dem Jahr 1 bis einschließlich 2025 war dies bereits möglich? In welchem Jahr war dies zuletzt vor 2025 der Fall und wann wird nach 2025 als nächstes die Jahreszahl das Quadrat einer natürlichen Zahl sein? Man begründe die Antworten.

(b) Für zwei aufeinanderfolgende Primzahlen größer 2 zeige man, dass die Differenz ihrer Quadrate stets gerade ist.

(c) Untersucht, ob die Aussage (b) auch gilt, wenn man anstelle von Primzahlen zwei beliebige aufeinanderfolgende natürliche Zahlen betrachtet. Begründet eure Antwort.

(d) Wir definieren $n_1, \ldots, n_9$ wie folgt:

- $n_1 = 1 \ldots 1$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Einsen besteht)
- $n_2 = 2 \ldots 2$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Zweien besteht)
- $n_3 = 3 \ldots 3$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Dreien besteht)
- $n_4 = 4 \ldots 4$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Vieren besteht)
- $n_5 = 5 \ldots 5$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Fünfen besteht)
- $n_6 = 6 \ldots 6$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Sechsen besteht)
- $n_7 = 7 \ldots 7$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Siebenen besteht)
- $n_8 = 8 \ldots 8$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Achten besteht)
- $n_9 = 9 \ldots 9$ (Zahl, deren Zifferndarstellung aus 2025 Neunen besteht)

Sei nun $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$ die Summe dieser neun Zahlen. Untersucht ob n und die (einfache) Quersumme von n jeweils Quadratzahlen sind.

Lösungsweg:

(a) **(2 Punkte)** Es ist $2025 = (45)^2$. Ab dem Jahr 1 gab es also 45 Jahre, in denen die Jahreszahl durch das Quadrat einer natürlichen Zahl dargestellt wird. Ferner ist

$$(44)^2 = (45-1)^2 = (45)^2 - 2 \cdot 45 + 1 = 2025 - 90 + 1 = 1936\,,$$
$$(46)^2 = (45+1)^2 = (45)^2 + 2 \cdot 45 + 1 = 2025 + 90 + 1 = 2116\,.$$

Das letzte Mal war 1936 ein Jahr, dessen Jahreszahl das Quadrat einer natürlichen Zahl ist, und im Jahr 2116 wird dies zum nächsten Mal der Fall sein.

(b) **(3 Punkte)** Jede Primzahl $p > 2$ ist eine ungerade Zahl, denn wäre p gerade, so wäre p durch 2 teilbar und daher keine Primzahl. Also existiert für p eine natürliche Zahl $k_p \in \mathbb{N}$, sodass

$$p = (2k_p + 1)\,.$$

Betrachten wir nun zwei beliebige, voneinander verschiedene ungerade Zahlen $(2m+1)$ und $(2n+1)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. sei $m < n$. Dann folgt für die Differenz ihrer Quadrate mithilfe der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 - (2m+1)^2 &= \Big(2n+1+(2m+1)\Big) \cdot \Big(2n+1-(2m+1)\Big) \\ &= 2(n+m+1) \cdot 2(n-m) = 2 \cdot 2 \cdot (n+m+1) \cdot (n-m)\,,\end{aligned}$$

was zeigt, dass dies eine gerade Zahl ist.

(c) **(1 Punkt)** Betrachten wir nun zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen n und $n+1$. Ist n gerade, so ist $n+1$ ungerade und umgekehrt. Im ersten Fall existiert für n gerade eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2k$. Es folgt für die Differenz der Quadrate mithilfe der dritten binomischen Formel

$$(n+1)^2 - n^2 = (2k+1)^2 - (2k)^2 = (2k+1+2k) \cdot (2k+1-2k) = (4k+1) \cdot 1\,,$$

dass dies eine ungerade Zahl ist. Im zweiten Fall existiert für n ungerade eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass $n = 2k+1$. Für die Differenz der Quadrate folgt nun wieder mit der dritten binomischen Formel

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= (2k+1+1)^2 - (2k+1)^2 \\ &= (2k+2+2k+1) \cdot (2k+2-2k-1) = (4k+2+1) \cdot 1\,,\end{aligned}$$

dass dies ebenfalls eine ungerade Zahl ist.

Die Differenz der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist also stets ungerade. Aussage (b) gilt hier also nicht.

(d) **(4 Punkte)** Für alle $i = 1, \ldots, 4$ kann mit vollständiger Induktion gezeigt werden, dass

$$n_i + n_{9-i} = \underbrace{1\ldots10}_{\text{2025 Ziffern}}\,.$$

Daher ist

$$\sum_{i=1}^{4} n_i + n_{9-i} = 4 \cdot \underbrace{1\ldots10}_{\text{2025 Ziffern}} = \underbrace{4\ldots40}_{\text{2025 Ziffern}}$$

und somit erhalten wir

$$n = \sum_{i=1}^{9} n_i = \sum_{i=1}^{4} n_i + n_{9-i} + n_5 = \underbrace{4\ldots40}_{\text{2025 Ziffern}} + 0\underbrace{5\ldots5}_{\text{2025 Ziffern}} = 4\underbrace{9\ldots95}_{\text{2024 Ziffern}}\,.$$

Für die Quersumme $Q(n)$ von n ergibt sich nun

$$Q(n) = 4 + 5 + 2024 \cdot 9 = 2025 \cdot 9 = 20250 - 2025 = 18225\,.$$

Die Primfaktorzerlegung von $Q(n)$ lautet

$$Q(n) = 18225 = 5^2 \cdot 3^6$$

und somit ist $Q(n)$ als Quadrat einer natürlichen Zahl darstellbar

$$Q(n) = 18225 = \left(5 \cdot 3^3\right)^2 = 135^2\,.$$

Für n gilt hingegen

$$n = 4\underbrace{9\ldots95}_{\text{2024 Ziffern}} = 4\underbrace{9\ldots99}_{\text{2023 Ziffern}}5 = 4\underbrace{9\ldots90}_{\text{2023 Ziffern}}0 + 95\,.$$

Dabei ist

$$95 = 5 \cdot 19$$

lediglich einmal durch 5 teilbar, wohingegen

$$\underbrace{4\ldots90}_{\text{2023 Ziffern}}0 = \underbrace{4\ldots9}_{\text{2023 Ziffern}} \cdot 100 = \underbrace{4\ldots9}_{\text{2023 Ziffern}} \cdot (2 \cdot 5)^2$$

zweimal durch 5 teilbar ist. Die Zahl n kann daher nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl sein.

Waste your money

Jan zockt regelmäßig das Online-Glückspiel *Waste your Money*, bei dem man seinen Einsatz entweder verliert oder verdoppelt (falls man gewinnt). Über die Gewinnwahrscheinlichkeit ist zunächst nichts bekannt. Jans Spielstrategie sieht folgendermaßen aus: Er setzt in jeder Runde den gleichen prozentualen Anteil seines aktuell vorhandenen Spielkapitals ein, und hofft, dass er gewinnt.

Beispiel: Wenn er 10 Euro hat, von denen er die Hälfte einsetzt, so hat er in der nächsten Spielrunde entweder nur noch 5 Euro, wenn er verliert, oder 15 Euro, wenn er gewinnt. Sofern er weiterspielt, wird er dementsprechend als nächstes 2,50 Euro oder 7,50 Euro einsetzen.

(a) Als er neulich einmal einen ganzen Nachmittag gespielt hatte, hatte er am Abend gleich viele Runden gewonnen wie verloren. Hat er insgesamt Gewinn oder Verlust gemacht?

(b) Tatsächlich liegen die Gewinnchancen liegen bei 60%; das bedeutet, dass von je 100 Spielen durchschnittlich 60 gewonnen werden. Jan hält es für eine gute Strategie, in jedem Spiel immer die Hälfte seines aktuellen Spielkapitals einzusetzen. Zeigt, dass Jan mit dieser Spielstrategie langfristig verliert.

Lösungsweg:

Wir bezeichnen mit X_n Jans Spielkapital in der n-ten Runde und mit a den Anteil, den er jeweils einsetzt. In Runde n setzt er also den Betrag $a \cdot X_n$ ein. Das Startkapital ist $X_0 > 0$.

Da Jan nur das Geld einsetzen kann, das er hat, gilt $0 < a \leq 1$, wobei wir der Einfachheit annehmen, dass das Geld beliebig teilbar ist, es also Beträge kleiner als 1 Cent gibt.

(a) **(5 Punkte)** Jan hat Verlust gemacht.

Wenn Jan ein Spiel in Runde k gewinnt, so hat er in der nächsten Runde den Betrag $X_{n+1} = X_n + a \cdot X_n = (1+a) \cdot X_n$; verliert er, so hat er in der nächsten Runde $X_{n+1} = X_n - a \cdot X_n = (1-a) \cdot X_n$. Nach n Spielen, von denen er $k \leq n$ gewinnt, hat er also den Betrag

$$X_n = X_0 \cdot (1+a)^k \cdot (1-a)^{n-k}\,,$$

und zwar unabhängig davon, in welcher Reihenfolge er gewinnt bzw. verliert. In unserem Fall ist $n = 2k$ gerade und somit

$$X_n = X_0 \cdot (1+a)^k \cdot (1-a)^k = X_0 \cdot ((1+a)\cdot(1-a))^k = X_0 \cdot (1-a^2)^k\,.$$

Wegen $0 < a \leq 1$ ist $0 \leq (1-a^2)^k < 1$ für alle natürlichen Zahlen k echt kleiner als 1. Jan hat also Geld verloren.

(b) **(5 Punkte)** Bei der Formulierung der Aufgabe hat sich ein **Fehler** eingeschlichen. Die Aussage soll unter der Behauptung des Spieleanbieters, dass von n Spielen *langfristig* $g \cdot n$ gewonnen werden, überprüft werden. Das ist etwas anderes als *durchschnittlich* $g \cdot n$ Spiele zu gewinnen (siehe dazu die Bemerkung weiter unten).

Wenn wir die Gewinnchancen also mit g bezeichnen, wobei $0 < g < 1$, dann gewinnt Jan im langfristig (d.h. für große n) von n Spielrunden $g \cdot n$; entsprechend verliert er langfristig $(1-g) \cdot n$ Runden. Damit ist sein Spielstand nach n Runden

$$\bar{X}_n = X_0 \cdot (1+a)^{g\cdot n} \cdot (1-a)^{(1-g)\cdot n} = X_0 \cdot \left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^g (1-a)\right]^n$$

Für $a = 0.5$ und $g = 0.6$ ist der Ausdruck in den eckigen Klammern gerade

$$r = \frac{3^{0.6}}{2}$$

Jan verliert langfristig sein Geld, wenn $r < 1$ ist, denn dann geht r^n für größer werdendes n asymptotisch gegen 0. Wir müssen also zeigen, dass $r < 1$ ist. Dazu schätzen wir r ab:

$$r = \frac{3^{0.6}}{2} = \frac{3^{3/5}}{2} = \frac{27^{1/5}}{2} < \frac{32^{1/5}}{2} = 1\,.$$

Also ist $0 < r < 1$ und somit strebt auch das Spielkapital $\bar{X}_n = X_0 r^n$ asymptotisch gegen 0.[1]

Bemerkung:

Tatsächlich ist die Situation für Jan viel besser als die Lösung suggeriert. Bei der Lösung haben wir so getan, als würde Jan von n Spielen immer *genau* $g \cdot n$ gewinnen und $(1 - g) \cdot n$ verlieren. Das stimmt für jedes endliche n natürlich nur im Mittel; tatsächlich ist die gewonnene Anzahl der Spiele bei n Runden *irgendeine* Zahl k zwischen 0 und n und es lässt sich sogar zeigen, dass das mittlere Spielkapital $\mathbb{E}[X_0 \cdot (1+a)^k \cdot (1-a)^{n-k}]$ nach n Runden im Mittel echt größer ist als $\bar{X}_n$. Dabei bezeichnet $\mathbb{E}[\ldots]$ den Erwartungswert der Zufallsgröße, die in den Klammern steht.

Der Erwartungswert lässt sich in diesem Fall leicht berechnen, weil die Anzahl k der gewonnenen Runden bei n Spielen und einer Gewinnwahrscheinlichkeit g gerade binomialverteilt ist. Damit erhält man

$$\mathbb{E}\left[X_0 \cdot (1+a)^k \cdot (1-a)^{n-k}\right] = X_0(1+a)^n\, \mathbb{E}\left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^k\right] = X_0(1 + a(2g-1))^n\,.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist für $g = 0.6$ gerade $1 + a/5$, also immer eine Zahl größer als 1 (sofern $a > 0$ ist). Damit gewinnt Jan langfristig und der Spieleanbieter geht pleite.

Man sieht auch leicht ein, dass für $g = 0.5$ das Spiel ausgeglichen und für $g < 0.5$ unfair für Jan ist (jeweils unabhängig vom Einsatz).

[1] „*But I have 52 million shares! What's 52 million times zero?! And don't tell me it's zero!*“ (Bart Simpson, aus: The Simpsons, Staffel 13, Folge 18)

Würfel und Partys

(a) Ayleen möchte die Ecken eines sechsseitigen Spielwürfels rot anmalen, sodass jede Ecke, die nicht rot angemalt ist, mindestens 2 rote benachbarte Ecken hat. Wieviele Ecken muss sie dafür mindestens anmalen?

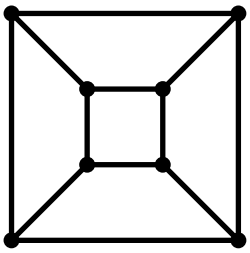
(b) Ayleen hat nun auf fünf der sechs Würfelseiten eine vierseitige Pyramide bündig aufgeklebt, sodass ihr neues Gebilde nun 13 Ecken hat. Wieviele Ecken muss sie jetzt rot anmalen, damit jede Ecke, die nicht rot angemalt ist, jetzt mindestens 3 rote benachbarte Ecken hat?

(c) Auf einer Party treffen sich n Leute, einige geben sich zur Begrüßung die Hand, wobei jede Person mindestens einer anderen Person die Hand gibt. Zeigt, dass es eine Teilmenge S von weniger oder gleich $n/2$ Personen gibt, sodass jede Person außerhalb von S mindestens einer Person in S die Hand gegeben hat.

(d) Auf einer Party treffen sich n Leute, einige geben sich zur Begrüßung die Hand, wobei jede Person mindestens 2 anderen Personen die Hand gibt. Zeigt, dass der Fall auftreten kann, dass es eine Gruppe S von Personen gibt, die weniger als $(n/2+1)$ Mitglieder hat, sodass jede Person außerhalb von S mindestens zwei Personen in S die Hand gegeben hat.

Lösungsweg:

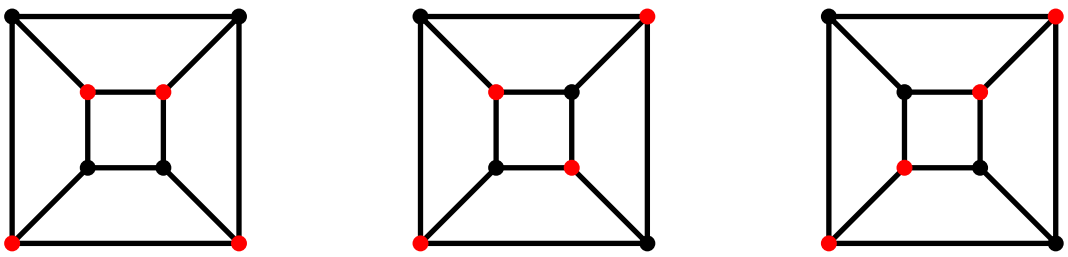
(a) **(2 Punkte)** Die Nachbarschaftsbeziehung der Ecken eines Würfels sieht folgendermaßen aus (man stelle sich dazu den Würfel z.B. perspektivisch von oben vor):



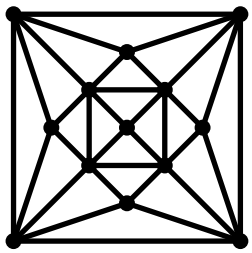
Wir bezeichnen mit X eine Menge von Ecken des Würfels – die roten Ecken – und mit k_2 die minimale Zahl der Ecken in X, die erforderlich sind, damit alle nicht in X enthaltenen Ecken zu mindestens 2 Ecken in X benachbart sind.

Es gibt genau 8 Ecken und jede Ecke hat genau 3 Nachbarn. Damit hat eine Menge von k_2 Ecken höchstens $3k_2$ Nachbarn. Wenn jede Ecke außerhalb von X zu (mindestens) 2 Ecken in X benachbart sein soll, müssen wir sie jeweils zweifach zählen. Daher muss für k_2 die Ungleichung $2(8-k_2) \leq 3k_2$ gelten, also $5k_2 \geq 16$. Daraus folgt $k_2 \geq 3.2$ und, da k_2 eine ganze Zahl ist, muss k_2 mindestens 4 sein.

Die folgenden Konfigurationen sind mögliche Lösungen:

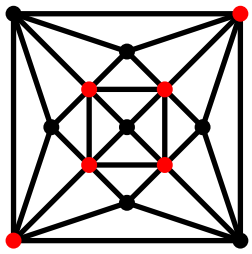


(b) **(3 Punkte)** Die Nachbarschaftsbeziehung der Ecken eines Würfels mit den fünf zusätzlichen Pyramiden sieht folgendermaßen aus:



Wir bezeichnen nun mit k_3 die minimale Zahl von Ecken in X, die erforderlich sind, damit alle nicht in X enthaltenen Ecken zu mindestens 3 Ecken in X benachbart sind. Insgesamt gibt es jetzt 13 Ecken; 4 davon haben 6 Nachbarn, 4 haben 5 Nachbarn und 5 haben 4 Nachbarn. Das vorherige Zählargument funktioniert daher nicht mehr.

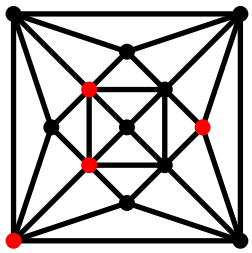
Durch Ausprobieren findet man leicht heraus, dass es eine Konfiguration mit $k_3 = 6$ Ecken gibt. Wir geben erst eine solche Konfiguration an und argumentieren dann, dass es nicht mit weniger als 6 Ecken funktioniert. So geht es zum Beispiel:



Angenommen, es würde mit 5 Ecken funktionieren. Da es 5 Ecken mit genau 4 Nachbarn gibt (die „Spitzen“der Pyramiden), muss für jede dieser 5 Ecken gelten, dass sie entweder in X ist oder mindestens 3 ihrer Nachbarn in X sind.

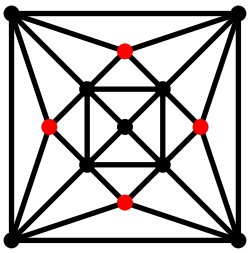
Wir betrachten nun zwei gegenüberliegende solche Ecken (sprich: auf einander gegenüberliegenden Seiten des Würfels). Falls beide Ecken mit 4 Nachbarn nicht in der Menge X sind, dann müssen jeweils mindestens drei ihrer Nachbarn in der Menge X liegen. Da diese Ecken verschieden sind, sind das 6 Punkte, also schon mehr als 5.

Nimmt man also an, dass nur einer der beiden Punkte in X liegt, so müssen mindestens drei Nachbarn des anderen in X liegen. Eine solche Konfiguration ist in diesem Bild veranschaulicht (wobei nur die relevanten 4 Punkte rot eingefärnt sind):

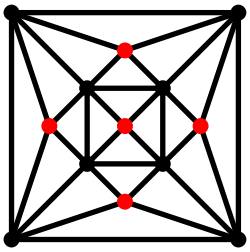


Betrachten wir nun die anderen einander gegenüberliegenden Ecken mit 4 Nachbarn, sieht man, dass beide soweit höchestens zwei Nachbarn in X haben. Für beide muss also jeweils mindestens eine benachbarte weitere Ecke zu X hinzugefügt werden, die, weil sie auf unterschiedlichen Seitern des Würfelsliegen, verschieden sein müssen, was wieder mindestens $\geq 4 + 2 = 6$ Ecken ergibt.

Als letztes betrachten wir also den Fall, dass alle vier gegenüberliegenden Paare von Ecken mit genau 4 Nachbarn in X enthalten sind. Dann ist keiner der Nachbarn der letzten Ecke mit 4 Nachbarn in X enthalten.



Würde man diese Ecke nicht hinzufügen, müsste man mindestens 3 ihrer Nachbarn hinzufügen, was $4 + 3 = 7 > 5$ ergibt. Fügt man also alle 5 Ecken, die jeweils 4 Nachbarn haben, zu X hinzu, ergibt sich folgende Konfiguration:



Hierbei haben allerdings die äußeren vier Ecken jeweils nur zwei rote Nachbarn. Damit müsste man auch hier weitere Ecken zu X hinzufügen, so dass X am Ende wieder mehr als 5 Ecken hat.

(c) **(3 Punkte)** Wir zeigen die Aussage durch vollständige Induktion in n. Da wir im Induktionsschritt von $n-2$ nach n gehen werden, müssen wir als Basis sowohl den Fall $n = 2$ als auch $n = 3$ betrachten. Für $n = 2$ ist die einzige Möglichkeit, dass sich beide Leute die Hand geben. Damit kann man eine beliebige der beiden Personen zur Menge S machen. Für den Fall $n = 3$ gibt es zwei Möglichkeiten: entweder eine Person gibt beiden anderen die Hand, dann machen wir diese zum einzigen Element von S. Andernfalls geben sich alle gegenseitig die Hand und wir können wieder eine beliebige Person zum einzigen Element von S machen.

Sei P die Menge aller Personen und für eine beliebige Person $p \in P$ sei $\#\mathrm{s}(p)$ die Anzahl der Leute, denen p die Hand schüttelt. Seien nun p_1 und p_2 zwei Personen, die sich die Hand schütteln und für die $\#\mathrm{s}(p_1) + \#\mathrm{s}(p_2)$ minimal ist. Wir können ohne Weiteres annehmen, dass $\#\mathrm{s}(p_1) \leq \#\mathrm{s}(p_2)$.

Sei Q die Menge der Personen, die mindestens einer anderen Person außer p_1 und p_2 die Hand geschüttelt haben. Wir können die Induktionsvoraussetzung auf Q anwenden und erhalten eine Teilmenge $S' \subseteq Q$ mit $|S'| \leq \frac{|Q|}{2} \leq \frac{n-2}{2}$, sodass alle Personen in $Q \setminus S'$ mindestens einer Person in S' die Hand geschüttelt haben.

Wir zeigen nun, dass $S := S' \cup \{p_2\}$ die gewünschte Eigenschaft erfüllt. Alle Personen in $Q \setminus S$ haben mindestnes einer Person in S' die Hand geschüttelt. Ferner hat p_1 der Person $p_2 \in S$ die Hand geschüttelt. Betrachten wir also eine Person $r \in P \setminus (\{p_1, p_2\} \cup Q)$. Solch eine Person hat keiner Person in $P \setminus \{p_1, p_2\}$ die Hand geschüttelt. Da die Person mindestens einer Person in P die Hand geschüttelt hat, war das p_1 oder p_2. Falls es p_2 war, sind wir fertig, da $p_2 \in S$. Andernfalls hat r der Person p_1 die Hand geschüttelt, aber keiner anderen Person, also $\#\mathrm{s}(r) = 1$. Folglich ist $\#\mathrm{s}(p_1) \geq 2$, da die Person sowohl r als auch p_2 die Hand geschüttelt hat. Dadurch ergibt sich mit $\#\mathrm{s}(p_2) \geq \#\mathrm{s}(p_1)$ die Ungleichungskette

$$\#\mathrm{s}(r) + \#\mathrm{s}(p_1) = 1 + \#\mathrm{s}(p_1) \leq 1 + \#\mathrm{s}(p_2) < 2 + \#\mathrm{s}(p_2) \leq \#\mathrm{s}(p_1) + \#\mathrm{s}(p_2).$$

Dies widerspricht allerdings der Minimalität des Paars p_1, p_2.

Folglich hat jede Person in $P \setminus S$ einer Person in S die Hand geschüttelt. Ferner ist $|S| = |Q| + 1 \leq \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$.

Alternative Lösung (ohne Induktion):

Sei V die Menge der n Personen. Wir nennen $S \subseteq V$ *beliebt*, wenn jedes $p \in V \backslash S$ mindestens einem $q \in S$ die Hand gegeben haben. Wir müssen zeigen, dass es eine beliebte Menge der Größe $\leq n/2$ gibt.

Sei S die *kleinste* beliebte Menge. Wir zeigen, dass die Menge $V \backslash S$ auch beliebt ist. Dazu nehmen wir das Gegenteil an und konstruieren daraus einen Widerspruch.

Nehmen wir also an, $V \setminus S$ wäre nicht beliebt. Dann gibt es ein $s \in S$, sodass keine Person in $V \backslash S$ der Person s die Hand gegeben hat. Dann muss aber $S \backslash \{s\}$ beliebt sein, denn s hat mindestens einer Person in S die Hand gegeben. Das widerspricht der Minimalität von S und beweist somit die Behauptung.

Folglich sind S und $V \backslash S$ beide beliebt, und damit gibt es eine beliebte Menge, deren Größe höchstens $n/2$ ist.

(d) **(2 Punkte)**

Hier hat sich leider der **Fehlerteufel** eingeschlichen, es sollte gezeigt, werden, dass es *nicht* immer eine solche Gruppe S gibt, sprich: dass der Fall auftreten kann,

> dass es *keine* Gruppe S von Personen gibt, die weniger als $(n/2 + 1)$ Mitglieder hat, sodass jede Person außerhalb von S mindestens zwei Personen in S die Hand gegeben hat.

Hier genügt es, unter der Annahme, dass die Behauptung falsch ist (dass dieser Fall also nicht auftreten kann), ein Beispiel anzugeben und daraus einen Widerspruch zu konstruieren. Dazu betrachten wir betrachten z.B. die Konfiguration von zwei Teilgruppen von je 3 Personen, die sich gegenseitig die Hand geben.

Damit müssen hierbei jeweils mindestens zwei Personen aus den Dreiergruppen in S sein. Damit erhält man jedoch $4 > \frac{6}{2} + 1 = 4$ – ein Widerspruch!

Das Runde muss (genau) ins Eckige

(a) Es sei Q ein Quadrat mit Seitenlänge 1 und Inkreis K. Berechne das Verhältnis des Umfangs von Q zum Umfang von K. Bereche außerdem das Verhältnis des Flächeninhalts von Q zum Flächeninhalt von K.

(b) Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, also ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises K sind (s. Abbildung). Das Verhältnis des Umfangs vom Viereck $ABCD$ zum Umfang von K sei 5:3. Was ist das Verhältnis des Flächeninhalts vom Viereck $ABCD$ zum Flächeninhalt von K?

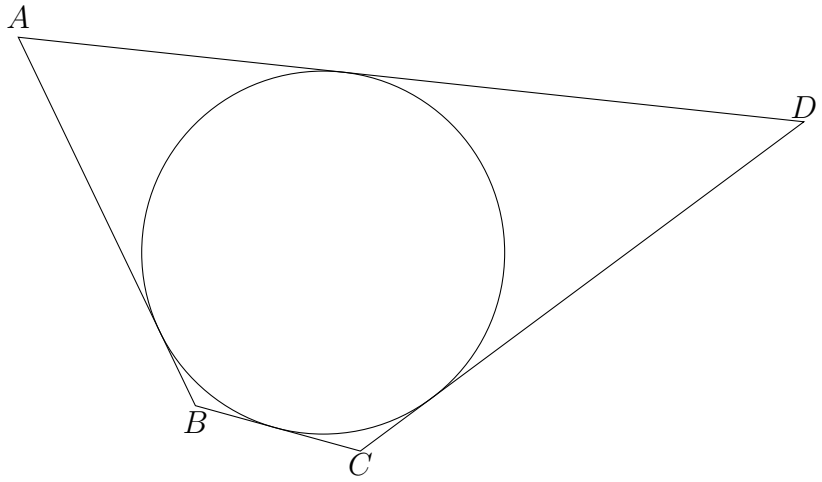


Abbildung 1: Tangentenviereck mit Inkreis K

(c) Nun gehen wir in drei Dimensionen: Es sei $ABCD$ ein Tetraeder, also eine Pyramide dessen Grundseite auch ein Dreieck ist. Jedes Tetraeder besitzt eine Inkugel, also eine Kugel die jede Seite des Tetraeders berührt. Nun bezeichnet K die Inkugel von $ABCD$. Außerdem ist bekannt, dass das Verhältnis vom Oberflächeninhalt von $ABCD$ zum Oberflächeninhalt von K gleich 5:3 ist. Was ist das Verhältnis vom Volumen von $ABCD$ zum Volumen von K?

Hinweis. Das Tetraedervolumen kann man mit der Formel $\frac{1}{3}hG$ berechnen, wobei G der Flächeninhalt der Grundseite ist und h die Höhe vom vierten Eckpunkt auf die Grundseite. Eine Kugel mit Radius r hat Oberflächeninhalt $4\pi r^2$ und Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Lösungsweg:

(a) **(2 Punkte)** Ein Quadrat mit Seitenlänge 1 hat Umfang 4 und Flächeninhalt 1. Der Inkreis hat Radius $\frac{1}{2}$, also den Umfang $2\pi r = \pi$ und den Flächeninhalt $\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi$. Beide Verhältnise sind also $\frac{\pi}{4}$.

(a) **(4 Punkte)** Es seien a, b, c und d die Seitenlängen von $ABCD$, M der Mittelpunkt von k und r dessen Radius. Indem wir die Strecken $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{DM}$ einzeichnen, zerlegen wir das Viereck in vier Dreiecke (s. die farblichen Dreiecke in Figure 2). Diese haben alle die Höhe r und deren Grundseite hat die Länge a, b, c bzw. d. Deswegen hat das Tangentenviereck den Flächeninhalt $\frac{1}{2}(a+b+c+d)r$. Das gesuchte Verhältnis ist also

$$\frac{\frac{1}{2}(a+b+c+d)r}{\pi r^2} = \frac{a+b+c+d}{2\pi r} = \frac{5}{3},$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $a+b+c+d$ der Umfang vom Viereck und $2\pi r$ der Umfang vom Kreis ist. Bei denen war das Verhältnis gegeben.

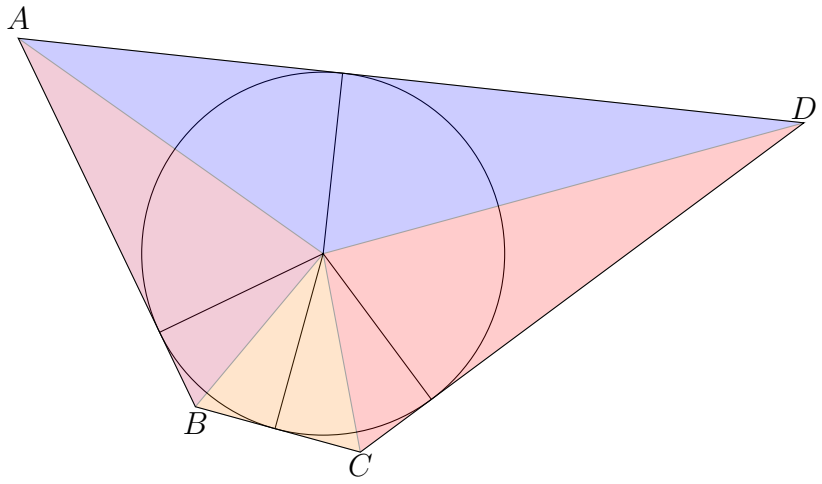


Abbildung 2: Tangentenviereck mit Inkreis k

(b) **(4 Punkte)** Seien F_1, F_2, F_3, F_4 die Flächeninhalte der vier Dreiecke vom Tetraeder, M der Mittelpunkt von K und r dessen Radius. Das Tetraeder lässt sich in die vier kleineren Tetraeder $ABCM$, $ABDM$, $ACDM$ und $BCDM$ aufteilen. Diese haben allen die Höhe r und als Flächeninhalt der Grundfläche F_1, F_2, F_3 bzw. F_4. Somit ist das Volumen vom Tetraeder gleich $\frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)r$ und das gesuchte Verhältnis ist

$$\frac{\frac{1}{3}(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{F_1 + F_2 + F_3 + F_4}{4\pi r^2} = \frac{5}{3}.$$