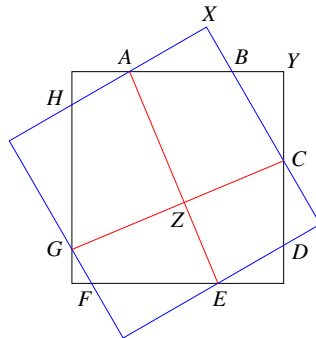


Aufgabe 1: Überlappende Bierdeckel (10 Punkte)

Wir betrachten einen auf einem Tisch liegenden quadratischen Bierdeckel Q mit Seitenlänge 1. Auf diesem liegt ein weiterer quadratischer Bierdeckel R mit Seitenlänge $r > 0$ derart, sodass sich auf jeder der vier Seiten von Q stets zwei Schnittpunkte mit dem Rand von R befinden. Die Schnittpunkte seien im Uhrzeigersinn mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H bezeichnet.



Des Weiteren führen wir noch die in der Skizze abgebildeten Eckpunkte X, Y sowie den Schnittpunkt Z der beiden Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ ein.

- Angenommen, die Bierdeckel hätten denselben Mittelpunkt und es gelte $r = 1$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Polygons mit den Eckpunkten $ABCDEFGH$ größer als $\frac{3}{4}$ sein muss.
- Begründen Sie, dass sich die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{CG}$ stets in einem rechten Winkel schneiden. Hierbei können die Mittelpunkte von R und Q nun möglicherweise wieder verschieden sein – ebenso deren Seitenlängen.
- Beweisen Sie, dass die Punkte A, X, Y und Z auf einem Kreis liegen.

Lösungsvorschlag

- Rotiert man R um den gemeinsamen Mittelpunkt M , so sind alle Punkte auf den Seitenlinien von R (und insbesondere von Q) mindestens soweit vom gemeinsamen Mittelpunkt entfernt, wie die Punkte auf dem Rand des Inkreises von Q (Vgl. Abbildung 1). Insbesondere gilt das auch für die

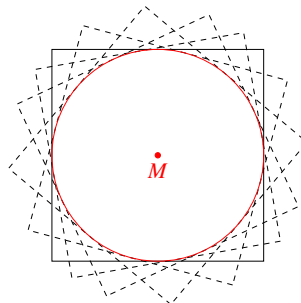


Abbildung 1: Skizze der eben beschriebenen Rotation

Randpunkte des Polygons $ABCDEFGH$. Folglich muss der Flächeninhalt des Polygons mindestens so groß sein, wie der Flächeninhalt des Inkreises. Dieser hat den Radius $\frac{1}{2}$ und damit den Flächeninhalt $\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} > \frac{3}{4}$.

- b) Wir betrachten zunächst den Spezialfall, dass die Quadrate denselben Mittelpunkt (aber nicht notwendigerweise die selbe Seitenlänge) haben. Da Q und R Quadrate sind und denselben Mittelpunkt haben, sind die Dreiecke $\triangle MCX$ und $\triangle NEL$ kongruent (Vgl. Abbildung 2).

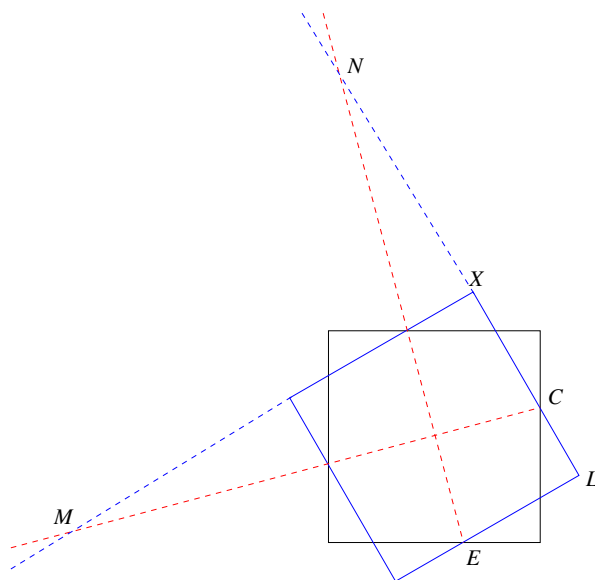


Abbildung 2: Kongruenz der Dreiecke

Insbesondere sind die Winkel $\alpha := \angle XMC$ und $\alpha' := \angle ENL$ gleich groß. Sei $\beta := \angle MCX$. Dann gilt $\alpha + \beta = 90^\circ$, da die Innenwinkelsumme von Dreiecken stets 180° beträgt und $\triangle MCX$ nach Konstruktion ein rechtwinkliges Dreieck ist. Dann muss aber auch $\alpha' + \beta = 90^\circ$ gelten und somit der Schnittwinkel der beiden roten Geraden ein rechter Winkel sein – wieder mit der Begründung, dass die Innenwinkelsumme von Dreiecken 180° betragen muss.

Wenn wir nun annehmen, dass die Mittelpunkte von Q und R nicht mehr übereinstimmen, müssen die oben eingeführten Dreiecke nicht mehr kongruent zueinander sein. Wir bemerken aber, dass sich bei der Verschiebung des Mittelpunktes von R in der Ebene zwar die Positionen der Punkte A, C, E und G ändern, nicht jedoch die Größen der Winkel $\angle EAB$ bzw. $\angle BCG$ (Vgl. Abbildung 3), denn diese sind eindeutig durch den Drehwinkel von R bzgl. Q sowie die Seitenlänge von R festgelegt.

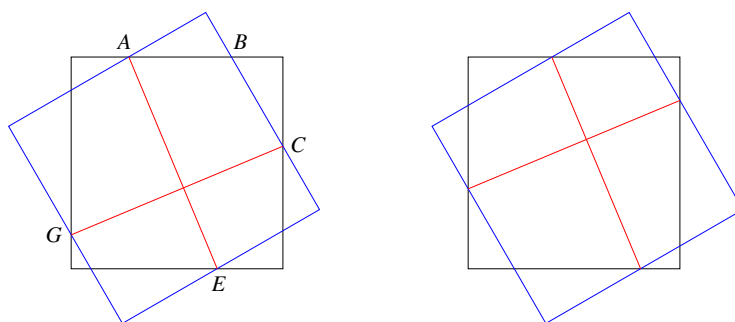


Abbildung 3: Parallelverschiebung der roten Geraden

Insbesondere werden die Geraden $\overline{AE}$ und $\overline{GC}$ bei Änderung des Mittelpunkts von R nur parallel verschoben. Ihr Schnittwinkel stimmt somit mit dem im Fall gleicher Mittelpunkte überein und entspricht nach vorigen Überlegungen dann einem rechten Winkel.

- c) Wir erinnern uns an folgenden Satz aus der Geometrie, der auch als *Umkehrung des Satzes von Thales* (jeder Winkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel) bekannt ist: Der Mittelpunkt des Umkreises eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Mittelpunkt der Hypotenuse. Eine mögliche Begründung funktioniert so: Ergänze das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ mit Hypotenuse $\overline{AB}$ kann zu einem Rechteck wie in Abbildung 4 dargestellt.

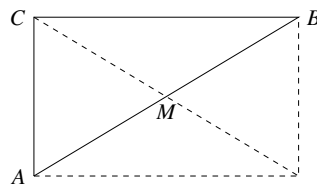


Abbildung 4: Konstruktion des Rechtecks

Die Diagonalen dieses Rechtecks sind gleich lang und schneiden sich im Mittelpunkt M der Hypotenuse. Folglich sind $\overline{AM}$, $\overline{CM}$ und $\overline{BM}$ gleichlang und liegen damit auf dem Umkreis des Dreiecks mit Mittelpunkt M .

Damit lösen wir nun die eigentliche Aufgabe: Betrachte die Dreiecke $\triangle AXC$, $\triangle AYC$ und $\triangle AZC$. Diese sind nach Konstruktion und wegen Teilaufgabe (b) rechtwinklig. Insbesondere sind die Winkel $\angle AXC$, $\angle AYC$ und $\angle AZC$ rechte Winkel. Nach dem Satz von Thales (genauer: der Umkehrung des Satzes von Thales) muss dann die Strecke $\overline{AC}$ der Durchmesser eines Kreises sein, auf dem die Punkte X, Y und Z liegen.

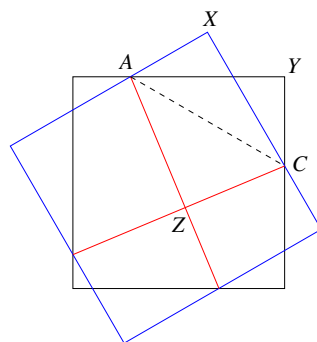


Abbildung 5: Durchmesser $\overline{AC}$ des Kreises

Aufgabe 2: Vorzeichenwechsel (10 Punkte)

- a) Entscheiden und begründen Sie, ob man den Wert $S = 21$ erhalten kann, wenn man in der Gleichung

$$S = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm 4^2 \pm 5^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder durch $-$ ersetzt.

- b) Zeigen Sie, dass man den Wert $S = 0$ erhalten kann, wenn man in der Gleichung

$$S = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \pm 4^2 \pm 5^2 \pm 6^2 \pm 7^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder $-$ ersetzt.

- c) Bestimmen Sie nun den kleinsten Wert $S \geq 0$, den man erhalten kann, wenn man in der Gleichung

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \dots \pm 1111^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder $-$ ersetzt.

- d) Ermitteln Sie schließlich den kleinsten Wert $S \geq 0$, den man erreichen kann, wenn man in der Gleichung

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2 \dots \pm 2025^2$$

jedes $\pm$ entweder durch $+$ oder $-$ ersetzt.

Lösungsvorschlag

- a) Das ist möglich, denn es gilt

$$-1^2 + 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 = -1 + 4 + 9 - 16 + 25 = 21.$$

- b) Dies funktioniert mit

$$1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 - 6^2 + 7^2 = 1 + 4 - 9 + 16 - 25 - 36 + 49 = 0.$$

- c) Zunächst beobachten wir, dass für $k \in \mathbb{N}$ immer

$$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 = k^2 - (k^2 + 2k + 1) - (k^2 + 4k + 4) + (k^2 + 6k + 9) = 4$$

gilt. Anders ausgedrückt – für die Quadrate von vier aufeinanderfolgenden Zahlen lassen sich die Operationen $+$ und $-$ immer so auswählen, dass wir bei dem Wert 4 landen. Folglich können wir für acht aufeinanderfolgende Zahlen die Operationen entsprechend wählen, sodass wir bei 0 landen, nämlich durch

$$k^2 - (k+1)^2 - (k+2)^2 + (k+3)^2 - ((k+4)^2 - (k+5)^2 - (k+6)^2 + (k+7)^2) = 4 - 4 = 0.$$

Um den gesuchten minimalen Wert $S \geq 0$ zu finden, bemerken wir, dass $1111 = 138 \cdot 8 + 7$ gilt. Wir können also gemäß Teilaufgabe (b) die Vorzeichen der ersten sieben Quadrate derart wählen, dass sie zu Null werden und unterteilen die verbleibenden 1104 Zahlen in Achtergruppen, bei denen wir die Vorzeichen wie oben wählen, um ebenfalls Null zu erhalten. Damit ergibt sich als Gesamtsumme $S = 0$. Diese erfüllt natürlich auch die Bedingung $S \geq 0$ und ist somit schon minimal.

- d) Zunächst zeigen wir, dass durch geeignete Vorzeichenwahl der Wert $S = 1$ herauskommen kann. Da 2024 durch acht teilbar ist, können wir wie in Teilaufgabe (c) für die Zahlen $2^2, \dots, 2025^2$ (das sind 2024 verschiedene Zahlen) die Vorzeichen derart wählen, sodass sich in Summe der Wert Null ergibt. Legen wir für 1^2 das Vorzeichen $+$ fest, so ergibt sich also $S = 1$.

Dies ist aber auch die kleinstmögliche Summe größer gleich Null, die erreicht werden kann! Dazu bemerken wir, dass sich unter den Zahlen von 1 bis 2025 genau $\frac{2025-1}{2} = 1013$ ungerade Zahlen befinden. Die Summe oder Differenz der Quadrate dieser Zahlen ist eine ungerade Zahl, denn einerseits sind Quadrate von ungeraden Zahlen stets ungerade und andererseits ist die Summe oder Differenz von einer ungeraden Anzahl von ungeraden Zahlen immer ungerade. Die übrigen Zahlen sowie ihre Quadrate sind alle gerade und damit auch ihre Summe oder Differenz. Da nun die Summe oder Differenz von einer ungeraden mit einer geraden Zahl aber immer eine ungerade Zahl ergibt, ist $S = 0$ unmöglich. Mit $S = 1$ haben wir also bereits den minimalen Wert gefunden.

Aufgabe 3: Einkreist! (10 Punkte)

Sei P eine Menge von n paarweise verschiedenen Punkten in der Ebene. Eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq P$ von Punkten heißt *einkreisbar*, falls ein Kreis existiert, der alle Punkte aus A umschließt, aber keinen weiteren Punkt aus $P \setminus A$ enthält.

- a) Wie viele verschiedene einkreisbare Mengen gibt es, wenn die Punkte von P alle auf einem Kreis K liegen?
- b) Sei Q eine vierelementige Punktmenge, sodass keine drei Punkte aus Q auf einer Geraden und nicht alle vier auf einem Kreis liegen (Q ist in allgemeiner Lage). Zeigen sie, dass die Anzahl der dreielementigen einkreisbaren Teilmengen von Q bestimmt, ob die konvexe Hülle von Q drei oder vier Ecken hat.
- c) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gegeben. Zeigen Sie, dass eine einkreisbare Teilmenge von P mit m Punkten existiert.
- d) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gegeben. Zeigen Sie, dass es mindestens $n - m + 1$ verschiedene einkreisbare Teilmengen von P mit m Punkten gibt.

Bemerkung: Die konvexe Hülle von Q ist die kleinste konvexe Menge, die Q enthält. Eine Menge K heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten aus K auch deren Verbindungsstrecke vollständig in K liegt.

Lösungsvorschlag

- a) Sei $p_1, \dots, p_n$ eine Nummerierung der Punkte auf dem Kreis im Uhrzeigersinn. Einem Kreis G der zumindest einen, aber nicht alle Punkte von P enthält, können wir den im Uhrzeigersinn ersten Punkt aus P zuordnen. Ist p_1 dem Kreis G als erster Punkt zugeordnet, dann ist $p_n \notin G$ und ein p_j mit $1 \leq j \leq n-1$ ist der im Uhrzeigersinn letzte Punkt in $P \cap G$. In diesem Fall gilt: $P \cap G = \{p_1, \dots, p_j\}$. Also gibt es $(n-1)$ einkreisbare Mengen in denen p_1 der im Uhrzeigersinn erste Punkt ist. Für jedes i mit $1 \leq i \leq n$ gibt es ebenfalls $n-1$ einkreisbare Mengen in denen p_i der im Uhrzeigersinn erste Punkt ist.

Zusammen mit der Menge P sind es also $n(n-1) + 1$ einkreisbare Mengen.

- b) Wir betrachten die beiden Fälle:

Fall 1: Die konvexe Hülle von Q hat drei Ecken, die wir mit a, b, c bezeichnen. Sei p der Punkt im Inneren des von a, b, c aufgespannten Dreiecks. In diesem Fall sind die drei Mengen $\{a, b, p\}$, $\{b, c, p\}$, $\{a, c, p\}$ einkreisbar, die Menge $\{a, b, c\}$ jedoch nicht. Also sind drei der dreielementigen Teilmengen von Q einkreisbar.

Fall 2: Die konvexe Hülle von Q ist ein Viereck a, b, c, d . Wir betrachten eine Gerade, die einen beliebigen der 3 Punkte abtrennt, z.B. den Punkt a . Da keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen, kann die Trenngerade sogar so gesetzt werden, dass alle Punkte positiven Abstand haben. Dann gibt es einen Kreis mit hinreichend großem Radius, der alle 3 Punkte b, c, d einkreist. Da das mit jedem der 4 Eckpunkte gemacht werden kann, gibt es 4 dreielementige einkreisbare Mengen.

- c) Wir nennen einen Punkt z in der Ebene *generisch* wenn die Abstände von z zu den Punkten in P alle verschieden sind. Wenn wir einen Kreis mit generischem Mittelpunkt z und Radius R betrachten, dann gibt es ein $R > 0$, so dass der Kreis genau m Punkte von P enthält. □

Warum ein generischer Punkt existiert: Die Menge der Punkte die den gleichen Abstand von p_i und p_j haben, ist eine Gerade $g_{i,j}$. Die Menge der nicht generischen Punkte ist also die Vereinigung aus endlich vielen Geraden (es gibt genau genommen $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Geraden $g_{i,j}$), also sind fast alle Punkte der Ebene generisch.

Alternative Lösung: Für jede endliche Punktmenge gibt es endlich viele Geraden, die 2 oder mehr Punkte enthalten. Folglich gibt es eine Gerade (bzw. sogar unendlich viele!), zu denen es keine parallelen Geraden gibt, die 2 oder mehr Punkte enthalten. Diese Geraden trennen die n Punkte in eine Menge mit m und eine mit $n - m$ Punkten für jedes beliebige $m \leq n$. Nun gibt es wieder einen Kreis mit hinreichend großem Radius, der die m Punkte auf der einen Seite der Geraden einkreist, aber keinen Punkt auf der anderen Seite.

- d) Sei $p_1, \dots, p_n$ die Sortierung von P für die gilt: ist $i < j$, dann ist die x -Koordinate von p_i echt kleiner als die von p_j (Annahme: die x -Koordinaten sind verschieden; ansonsten vertauscht man einfach x und y). Wir behaupten, dass es für jedes $i \leq n - m + 1$ einen Kreis K_i gibt, der genau m Punkte von P enthält und in dem p_i der Punkt mit der kleinsten x -Koordinate ist (diese Eigenschaft zeigt, dass die Kreise $K_1, K_2, \dots, K_{n-m+1}$ alle verschieden sind!).

Zur Existenz von K_i : Wir betrachten einen Prozess der in p_i startet, dabei wandert die x -Koordinate des Mittelpunkts mit der gleichen Geschwindigkeit nach rechts, wie der Radius wächst; ist $p_i = (x_i, y_i)$, dann hat der Kreis $C_i(r)$ mit Radius r den Mittelpunkt $(x_i + r, y_i)$. Wir beobachten, dass für $r < r'$ gilt: $C_i(r) \subset C_i(r')$ und die Punkte von P einzeln vom wachsenden $C_i(r)$ eingefangen werden (Annahme: der Mittelpunkt des Kreises durch p_i, p_j, p_k liegt nicht auf einer horizontalen Geraden durch einen der drei Punkte). Da $C_i(0)$ nur p_i enthält und für ausreichend großes r die $n - i + 1$ Punkte $p_i, \dots, p_n$ alle in $C_i(r)$ enthalten sind, gibt es, wenn $n - i + 1 \geq m$ gilt, einen Kreis $C_i(r)$ der genau m Punkte von P enthält. $\square$

Aufgabe 4: Zahlenfolgen (10 Punkte)

Gegeben sei eine Zahl a mit der Eigenschaft $0 < a < 1$, sowie eine Zahlenfolge $x_1, x_2, x_3, \dots$ welche die Bedingung

$$x_1 = a \quad \text{und} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Wir bezeichnen a als Startwert der Folge.

- Angenommen, Sie starten die Folge einmal beim Startwert $\frac{1}{3}$ und ein weiteres Mal beim Startwert $\frac{2}{3}$. Erklären Sie, warum sich die beiden daraus resultierenden Folgen an der 2025igsten Stelle unterscheiden müssen.
- Begründen Sie, dass eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_m < m - 1$ gilt. Dabei dürfen Sie ohne Beweis annehmen, dass $x_m < m \cdot x_1$ ist für alle $m \in \mathbb{N}$.
- Beweisen Sie, dass zwei Zahlen $S, T \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft existieren: Für jeden Startwert und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $S \leq x_n \leq T$.

Lösungsvorschlag

- Seien (a_n) und (b_n) die aus den Startwerten $a_1 = \frac{1}{3}$ bzw. $b_1 = \frac{2}{3}$ resultierenden Folgen. Wir zeigen mit Hilfe eines Widerspruchsarguments, dass $a_n \neq b_n$ sogar für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und damit natürlich erst recht für den Fall $n = 2025$.

Angenommen, es gibt doch ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n = b_n$. Dann muss es auch ein kleinstes n mit dieser Eigenschaft geben. Für dieses n gilt

$$\begin{aligned} 0 = a_n - b_n &= \left(a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{n^2} \right) - \left(b_{n-1} + \frac{b_{n-1}^2}{n^2} \right) = (a_{n-1} - b_{n-1}) + \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{n^2} \\ &= (a_{n-1} - b_{n-1}) + \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})(a_{n-1} + b_{n-1})}{n^2} = (a_{n-1} - b_{n-1}) \left(1 + \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Da n minimal gewählt wurde (und wegen $a_1 \neq b_1$ größer als 1 sein muss), ist $a_{n-1} - b_{n-1} \neq 0$. Die rechte Seite der obigen Gleichungskette wird also nur dann Null, wenn

$$\left(1 + \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{n^2} \right) = 0$$

gilt. Durch Umstellen erhalten wir die Forderung $a_{n-1} + b_{n-1} = -n^2$. Diese Forderung kann aber niemals erfüllt werden, denn (a_n) und (b_n) sind monoton steigend und haben jeweils einen positiven Startwert.

- Wir wissen, dass $d = 1 - x_1 > 0$ gilt. Somit haben wir für $m > \frac{1}{d}$:

$$x_m < mx_1 = m(1 - d) = m - md < m - 1.$$

- Bei dieser Aufgabe hat sich leider der **Fehlerteufel** eingeschlichen, denn die Folge ist zwar für jedes feste $a \in (0, 1)$ nach oben beschränkt, die Schranke hängt aber von a ab; insbesondere gilt für $a = 1$, dass $x_n = n$ für alle $n \geq 1$. Damit gibt es keine obere Schranke, die unabhängig von a wäre. Gezeigt werden kann (und sollte) die folgende Aussage:

Beweisen Sie, dass für jeden Startwert $a \in]0, 1[$ zwei Zahlen $S, T \in \mathbb{R}$ mit der folgenden Eigenschaft existieren: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $S \leq x_n \leq T$.

Los geht's: Da die Folge (streng) monoton wachsend ist mit Startwert $x_1 = a$, ist $S = a$ eine untere Schranke; als untere Schranke, die unabhängig von a ist, funktioniert auch $S = 0$. Für die obere Schranke nutzen wir aus, dass für $n \geq 2$ stets gilt:

$$\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{\frac{x_n^2}{n^2}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \cdot \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Ist m wie im Teil (b) und noch $n \geq m$, wobei m von a abhängen darf, so erhalten wir durch geschicktes Einfügen von Nullen die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n} &= \left(\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_{m+1}} \right) + \left(\frac{1}{x_{m+1}} - \frac{1}{x_{m+2}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) \\ &< \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n-1} < \frac{1}{m-1}. \end{aligned}$$

Wegen $x_m < m - 1$ haben wir

$$x_n < \frac{1}{\frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1}}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist eine konstante Zahl, die nicht mehr von n abhängig ist. Mit unseren Vorüberlegungen erhalten wir also als obere Schranke für unsere Folge das Maximum

$$T = \max \left\{ x_1, \dots, x_{m-1}, \frac{1}{\frac{1}{x_m} - \frac{1}{m-1}} \right\}.$$